

Nyomott rudak határteherbirásának meghatározása elméleti úton

T a r t a l o m

1.§	Célkitűzés	2
2.§	Az ideális alakzat tulajdonságai és határállapota	6
3.§	Az ideális alakzat belső erőinek és alakváltozásának elemzése:	10
	A keresztmetszeten megoszló feszültségek	11
	A meggörbült rúdtengely differenciálegyenletei és azok általános megoldása	18
	A rúd meggörbült tengelyének egyenlete	21
4.§	Határteherbirás	31
5.§	Speciális esetek	43
6.§	Példák	46
7.§	Összefoglalás	54

1.§ Célkitűzés

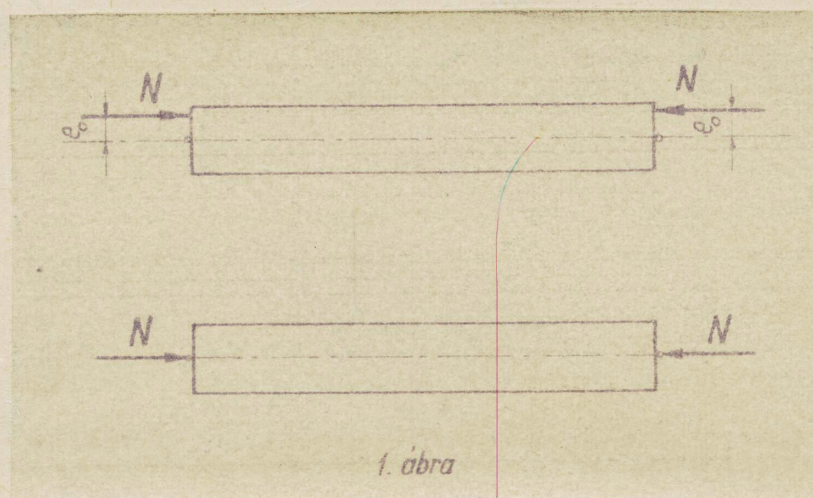
E tanulmány célja a végein elfordulhatóan megtámasztott, egyenes tengelyű, állandó keresztmetszetű nyomott rúd határteherbírási elméleti úton történő meghatározása. E célt szabatosan így fogalmazhatjuk meg: Elméleti úton akarunk választ adni arra a kérdésre, hogy a sztatikus teher valamely paraméterét (jellemzőjét), például

- 1/ adott nagyságú erő e_0 külpontosságát* (1. ábra) vagy
- 2/ adott külpontosságú erő N nagyságát (1. ábra) vagy
- 3/ központos erő N nagyságát (1. ábra) vagy
- 4/ adott támadópontú erő α ferdeségi szögét, vagy
- 5/ adott ferde hatásvonalú erő N nagyságát,

vagy egyéb paraméterét lassan növelvén, a paraméter melyik értékénél juthat a rúd határállapotba? Jelen tanulmányban ezen esetek közül csupán az első hárommal fogunk foglalkozni.

Hogy a műszaki szilárdságtan és rugalmasságtan valamely kérdését elméleti úton megválaszolhassuk, kénytelenek vagyunk a valóságos alakzatot (rudat, megtámasztást stb-t) ideális alakzattal helyettesíteni.

* Az e_0 jelen tanulmányban az erőnek a csuklóponthoz (vagyis a rúdvégek elfordulási középpontjához) viszonyított külpontosságát jelenti, míg e jelenti az erőnek a keresztmetszet súlypontjához (meggörbült tengelyhez) viszonyított külpontosságát (2. ábra, vagyis $e = e_0 + y$)



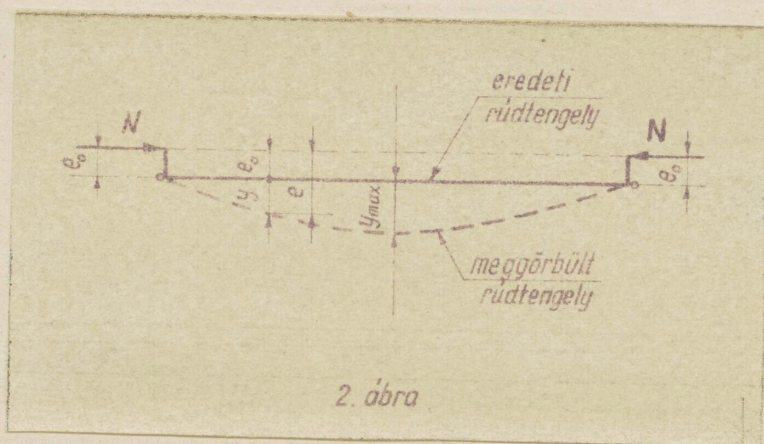
Amikor az ideális alakzatot definiáljuk, vagyis tulajdonságait előírjuk, egyúttal definiálnunk kell az ideális alakzat határállapotát is. Következésképpen, az elmélet eredménye annál inkább fogja megközelíteni a valóságot, mennél megegyezőbbek az ideális alakzat tulajdonságai a valóságos alakzat tulajdonságaival, és mennél megegyezőbb az ideális alakzat határállapota a valóságos alakzat határállapotával.

Természetesen mindig tisztában kell lennünk azzal, hogy mit akarunk érteni a valóságos alakzat határállapota alatt. Elfogadhatónak látszik a következő á l t a l á n o s fogalomalkotás: a valóságos alakzat határállapota az az állapot, melynél a valóságos alakzat már nem felel meg a rendeltetésének, például, amikor már nem elégíti ki a megnövekedett forgalom igényeit, vagy nem felel meg az újabb városrendezési elveknek, vagy a teher hatására túrheteretlen lengésbe jön vagy megreped avagy összetörik. Amikor azonban csupán a sztatikus teher hatását vizsgáljuk, akkor megelégedhetünk a következő s z ü k e b b fogalomalkotással: a valóságos alak-

zat határállapota az az állapot, amelynél a valóságos alakzat a teher hatására már elcsúszást ill. felbillenést ill. túl nagy kigörbülést szenved, vagy megreped, avagy összetörik. (A sztatikus tervező természetesen - ha kell - a "teher" elnevezés alatt nemcsak a hasznos terhet fogja érteni, hanem a saját súlyt, hőmérsékletváltozás és talajsüllyedés hatását, valamint egyéb sztatikai hatást is, a "kigörbülés" elnevezés alatt pedig nemcsak kihajlást fog érteni, hanem lehajlást vagy egyéb alakváltozást is.)

Az ideális alakzat tulajdonságait és határállapotát a második paragrafusban fogjuk definiálni. A tanulmány további részei a második paragrafus feltevéseiből vont következtetéseket tartalmazzák, mégpedig:

A harmadik paragrafusban a definiált ideális alakzat alakváltozásait vizsgáljuk, mégpedig abban az esetben, amikor a terhelő erő párhuzamos a terheletlen rúd eredeti tengelyének megfelelő iránnyal s adott N , e_0 paraméterértékekkel van jellemezve. E vizsgálat eredményeképpen meg fogjuk kapni a rúd meggörbült tengelyének egyenletét, valamint a középső keresztmetszet $e_0 + y_{\max}$ húrmagasságát (2. ábra).



A negyedik paragrafusban, a gondolatmenetet folytatván, azt fogjuk megvizsgálni, hogy amikor a középső keresztmetszet már határállapotba jutott, mekkora a középső keresztmetszet $e_0 + y_{\max}$ húrma-gassága. Ezen értékből következtetni fogunk a határállapotot előidéző teher jellemzőire, vagyis a teher N nagyságára és e_0 külpontosságára. Természetesen eredményeinket különböző képletek fogják kifejezni aszerint, hogy mik a rúd jellemzői. Ezzel tehát még az inverz feladat megoldásához fogunk eljutni, vagyis csak arra a kérdésre fogunk választ kapni, hogy bizonyos jellemzőkkel megadott rúdnak határállapotát mekkora N , e_0 paraméterpárokkal jellemzett teher idézi elő. A negyedik paragrafus további részében tehát a következő direkt feladattal fogunk foglalkozni: Ha a teher jellemzői egymáshoz képest tetszőlegesen, de fokozatosan nőnek, adott N , e_0 értékig, akkor a rúd középső keresztmetszete határállapotba jut-e?

Az ötödik paragrafus speciális eseteket tárgyal. Elsősorban azt a speciális esetet, amikor e_0 paraméterérték 0 marad, vagyis csak az erő nagysága növekszik fokozatosan N értékig.

A hatodik paragrafusban a levezetett képletek felhasználásának bemutatására numerikus példákat dolgozunk ki.

A hetedik paragrafusban végül összefoglaljuk az elmondottakat.

2.§ Az ideális alakzat tulajdonságai és határállapota

Az első paragrafusban megkíséreltük a nyomott rúd határteherbirásának fogalmát definiálni, s egyben igyekeztünk a határteherbirás meghatározására szolgáló alapelvet megadni. Érdekes történeti tény az, hogy a műszaki szilárdságtan és rugalmasságtan kutatói közül azok, akik a nyomott rúd határteherbirására vezettek le eredményeket, nem mindig törekedtek a határteherbirás fogalmának definiálására és a határteherbirás meghatározását (vagyis a képletek levezetését) nem mindig építették fel valamely szabatosan megfogalmazott alapelvre. Azt, hogy mégis helyes (vagyis gyakorlatilag használható) eredményekre jutottak, e kutatók a pompás intuíciónak köszönheték. A természettudományok története bizonyítja, hogy a bonyolultabb jelenségek közötti egyszerű törvények felfedezésének csirája többnyire az intuíción, vagyis a közvetlen meglátás volt; az így felfedezett törvények azonban később, a fogalmak és alapelvek tisztázása révén kisebb-nagyobb kiegészítésre ill. módosításra szorultak. Így történt ez a nyomott rudak határteherbirásának meghatározásánál is: a különböző szerzők igen eltérő képleteket vezettek le, s az elméletek, amelyekkel képleteiket levezették, az idők folyamán többször és lényegesen változtak.

Ha a különböző szerzők (Euler, Tetmajer, Rankin, Kármán, Perry, Chwalla, Ježek, Shanly, Müllersdorf, Csonka, Menyhárd és mások) elméleteit egységes szempontból akarnánk jellemezni, akkor minden egyes elméletnél fel kellene sorolnunk az illető szerzők által elképzelt ideális alakzatoknak kimondott

vagy hallgatólagosan feltételezett tulajdonságait és határállapotát. Az eddig ismert összes elméletnek ilyenképpen való felsorolása nem alkotja jelen tanulmány célját, hanem csak három példát említünk meg: 1/ A legprimitívebb elmélet szerint a nyomóerő azon értéke, amely a rúd határteherbirását jellemzi, a

$$\sigma_{sz} F$$

képlettel számítandó ki. σ_{sz} a rúd anyagának szilárdsága, F a keresztmetszeti terület. Ezt az elméletet, az első paragrafus disztinkcióit követve, az jellemzi, hogy a feltételezett ideális alakzat olyan, hogy annak keresztmetszeteiben csakis egyenletesen megoszló feszültség keletkezhetik, az ideális alakzat határállapota pedig az az állapot, amelynél a feszültség éppen σ_{sz} . 2/ Az Euler-féle elmélet szerint a nyomóerő azon értéke, amely a rúd határteherbirását jellemzi, a

$$\frac{\pi^2 E J}{l^2}$$

képlettel számítandó ki. Ezen elméletben feltételezett ideális alakzat egy olyan rúd, amely rugalmas és követi a Bernoulli-Navier-féle feszültség-alakváltozás-törvényt, végtelen szilárd, terheletlen állapotban tökéletesen egyenes, megtámasztása tökéletes csukló, a terhelés tökéletesen központos. Az ideális alakzat határállapota az az állapot, amelynél a rúd tengelye már nem egyenes. 3/ Az eredeti Perry-féle elmélet szerint a nyomóerő azon értékét, amely a határteherbirást jellemzi, a

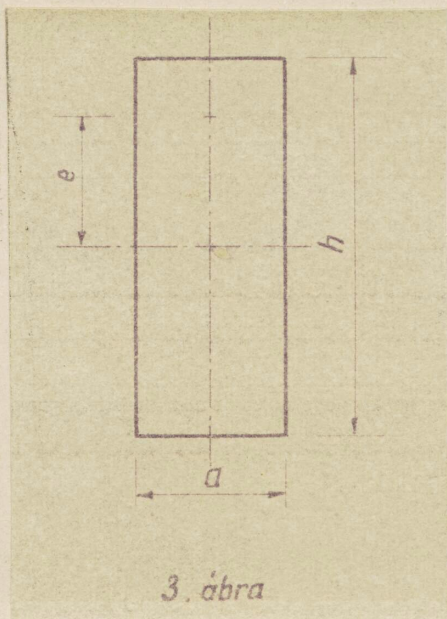
$$\beta \sigma_f F$$

képlettel kell kiszámítani, ahol β együttható az $(1 - \beta)(\mu - \beta) = m\mu\beta$ egyenlet kisebbik gyöke, σ_f a folyási határ, $\mu = \sigma_k / \sigma_f$, $m = h/k$, k a magtávolság, $\sigma_k = \pi^2 E / \lambda^2$, h jellemzi a kezdeti görbültség húrmagasságát. Ezen elméletben feltételezett ideális alakzat egy olyan rúd, amely a folyási határig követi a Bernoulli-Navier-féle erő-alakváltozástörvényt, terheletlen állapotban kis húrmagasságú félszínuszvonal alakú kezdeti görbültsége van, megtámasztása tökéletes csukló, terhelése tökéletesen központos. Az ideális alakzat határállapota az az állapot, amelynél a középső keresztmetszet homorúoldali szélén folyás keletkezik.

Már most, jelen tanulmány tárgyát alkotó elméletben feltételezett ideális alakzat nem más, mint egy olyan rúd, amely elfordulhatóan van megtámasztva, terheletlen állapotban tökéletesen egyenes (2. ábra), keresztmetszete derékszögű négyszög* (3. ábra), követi a Navier-féle törvényt, vagyis a keresztmetszetek az alakváltozások során síkok maradnak, még akkor is, ha a rúd egyes szálainak hosszváltozásai a Hooke-féle alakváltozási tartományon (rugalmas tartományon) kívül esnek; anyaga korlátozott szilárdságú ideál-plasztikus anyag, vagyis nyúlás-feszültségdiagramja a 4.c ábrán megadott alakú. Feltételezzük tehát, hogy az anyag ε_0 fajlagos nyúlásig rugalmasan, majd innen ε_{\max} nyúlásig plasztikusan viselkedik. ε_{\max} alatt a határnyúlást értjük. Ezen ideális alakzat határállapota alatt mármost azt az állapotot értjük, a-

* Ezt a megszorítást a számítási nehézségek leküzdése végett tesszük.

melynél a középső keresztmetszet homorú oldali szélén határnyúlás keletkezik.



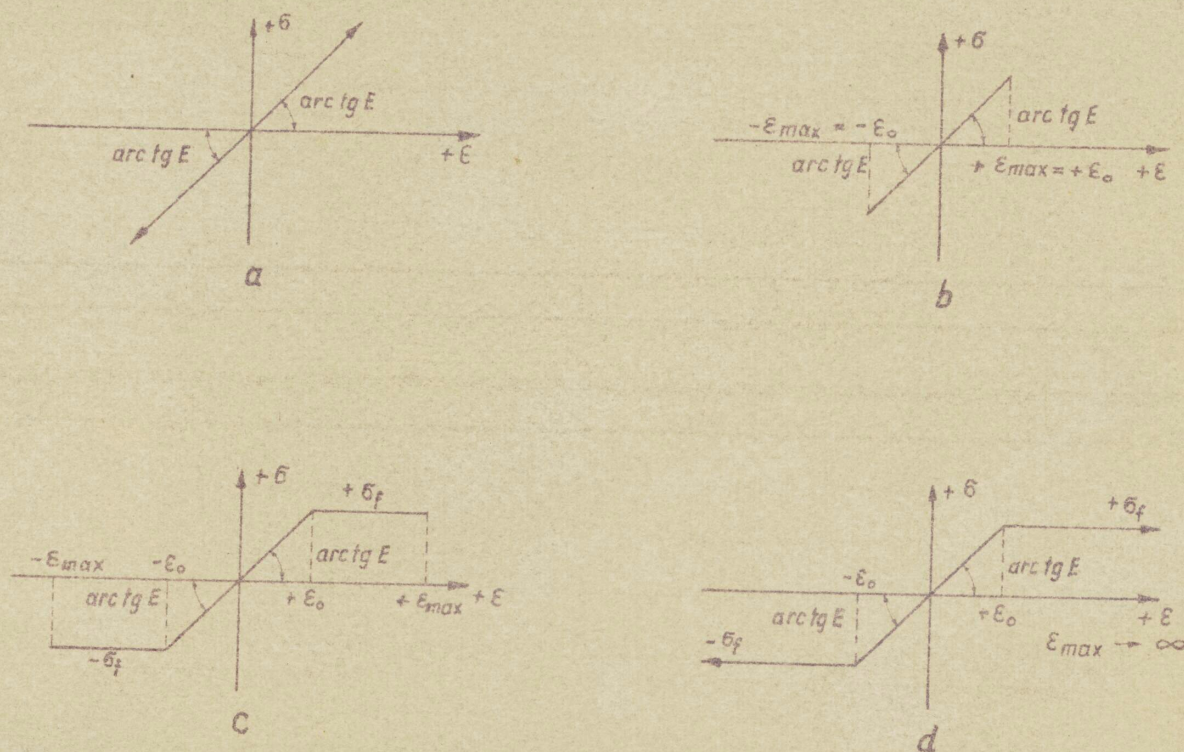
Fejtegetéseink alapjául szolgáló erő-alakváltozás törvényben az ϵ_{\max} határnyúlásnak jelentős szerepe van (s elméletünk éppen ebben különbözik az eddigiektől), vagyis figyelemmel vagyunk a rúd anyagának szivósságára. Bevezetvén a $\mathcal{J} = \epsilon_{\max} / \epsilon_0$ jelölést, \mathcal{J} -t a szivósság mértékének nevezhetjük. A különböző szivósságú anyagokat tehát

különböző \mathcal{J} értékek jellemzik, így például:

Ha σ_f véges és speciálisan $\mathcal{J} = \infty$ az anyag végtelen szilárdságú, ideálisan plasztikus anyag. Ez egyébként a szorosabb értelemben vett ideálisan plasztikus anyag, amelynek a határnyúlása is végtelen (4. d ábra).

Ha σ_f véges és speciálisan $\mathcal{J} = 1$, akkor, az anyag nyúlásfeszültség-diagramjának plasztikus szakasza nincsen. Ezt az anyagot korlátozott szilárdságú ideálisan rugalmas anyagnak tekinthetjük (4. b ábra).

Ha $\sigma_f = \infty$, akkor ideálisan rugalmas, végtelen szilárdságú anyagról van szó (4. a ábra). Ezzel az esettel csak összehasonlításként fogunk foglalkozni.



4. ábra

3. § Az ideális alakzat belső erőinek és alakváltozásainak elemzése

Ebben a fejezetben a 2. §-ban definiált ideális alakzat keresztmetszeteiben fellépő megoszló feszültségekkel, a rúd alakváltozási differenciálegyenleteinek általános megoldásával és a rúd meggörbült szilárdsági tengelyét leíró egyenletek meghatározásával fogunk foglalkozni. Az egyszerűbb és áttekinthetőbb tárgyalás érdekében azonban átmenetileg tételezzük fel, hogy a vizsgált rúd anyaga korlátlan szilárdságú, ideálisan plasztikus anyag. E feltevés alapján levezetett eredményeink véges szilárdságú ideál-plasztikus anyagú

rudakra is érvényesek, s ezeknél a határnyúlás figyelembevétele csupán bizonyos korlátozások tekintetbevételét jelenti, amelyeket részletesen a 4.§-ban fogunk tárgyalni.

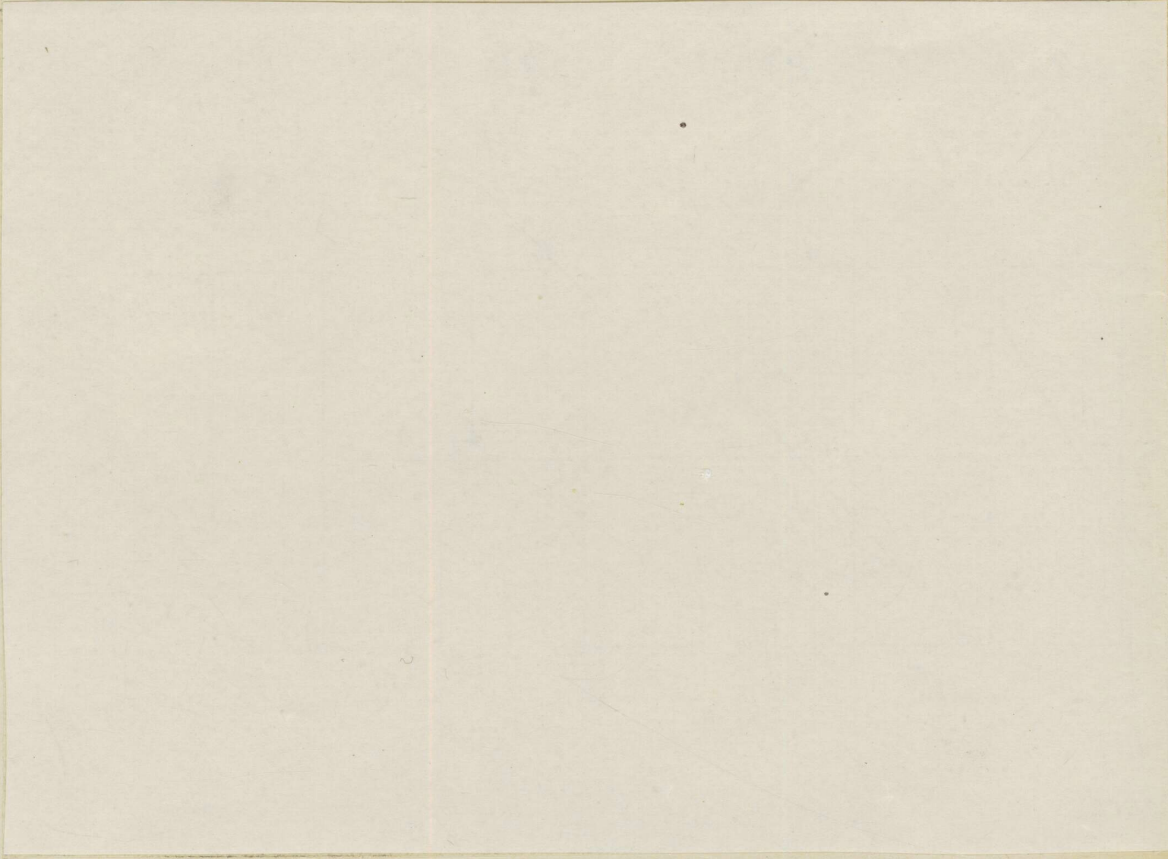
A keresztmetszeten megoszló feszültségek

Jelöljük a külpontos nyomóerő nagyságát N -nel. A külpontosságot e -vel (ez utóbbi a keresztmetszet súlypontjához viszonyítva). A keresztmetszeti méretek jelölése a 3. ábra szerint történjék.

Könnyű elképzelni, hogy adott keresztmetszeti méretek és adott σ_f folyáshatár mellett különböző N erő nagyság és e külpontosság esetében különböző feszültségmegoszlásokat kapunk, amelyek közül néhányat az 5. ábrán tüntettünk fel.

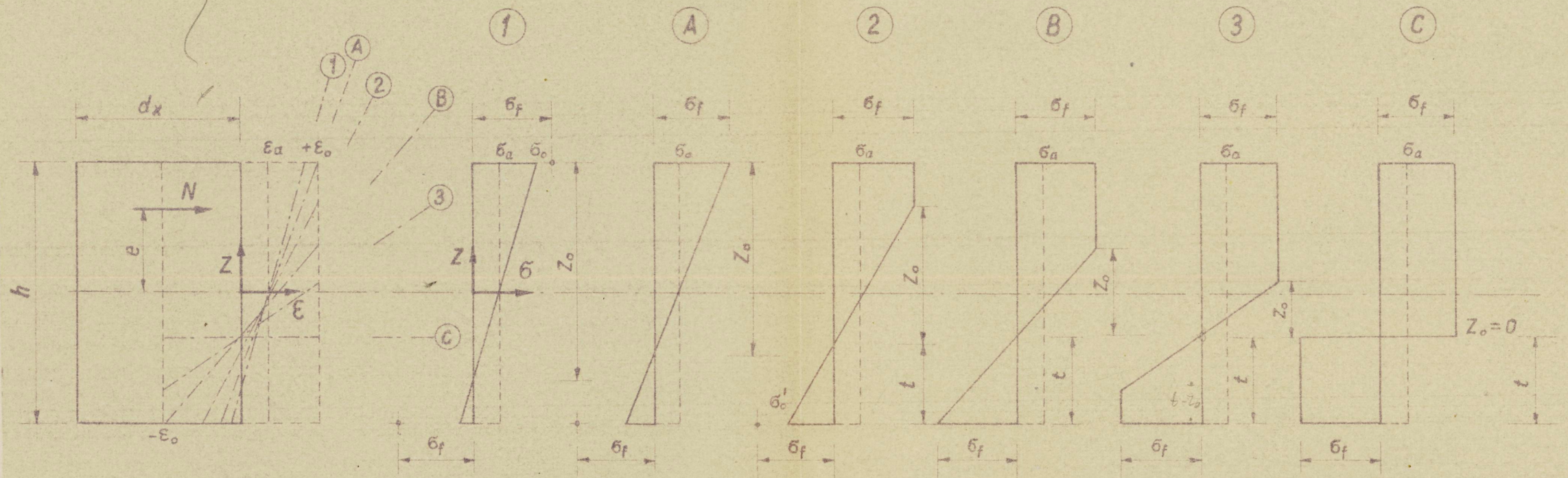
"A" alatt éppen azt az állapotot ábrázoltuk, amelyben a keresztmetszet nyomott oldalán lévő szélső szálban éppen a folyáshatárnak megfelelő feszültség lép fel. Ezzel egyidőben a keresztmetszet húzott oldalon lévő szélső szálában, külpontos nyomásról lévén szó, még természetesen a folyáshatárnál kisebb feszültség lép fel.

"B" alatt azt az állapotot ábrázoltuk, amelyben a keresztmetszet húzott oldalán lévő szélső szálában lép fel a folyáshatárnak éppen megfelelő feszültség. Ezzel egyidőben a nyomott oldalon lévő szélső szálban és annak környezetében már a folyáshatárnak megfelelő egyenletes feszültségmegoszlás uralkodik.



"C" alatt azt az állapotot ábrázoltuk, amelyben a keresztmetszet nyomott - ábrázolásunk szerint 0 vonal feletti - részében már mindenütt a folyáshatárnak megfelelő egyenletes nyomófeszültség, míg a húzott részben a húzó folyáshatárnak megfelelő egyenletes húzófeszültség lép fel. Ez az állapot egyben a plasztikus teherbirás teljes kimerülését jelenti.

A terheletlen állapot és az "A" ill. "B" ill. "C" állapot közötti u.n. átmeneti állapot "1" ill. "2" ill.



5. ábra

"C" alatt azt az állapotot ábrázoltuk, amelyben a keresztmetszet nyomott - ábrázolásunk szerint 0 vonal feletti - részében már mindenütt a folyáshatár-

"3" alatt vannak feltüntetve. Az "1" állapotot tehát az jellemzi, hogy a teljes keresztmetszet rugalmasan viselkedik s nevezzük a továbbiakban ezt az állapotot "rugalmas állapot"-nak. A "2" állapotban a keresztmetszet nyomott oldalán lévő szélső szálakban és annak környezetében már megindult a folyás, tehát a plasztikus alakváltozás, míg a húzott oldalon lévő szálakban még rugalmas állapot uralkodik. A továbbiakban ezt az állapotot "félig plasztikus" állapotnak fogjuk nevezni. A "3" állapotban mind a nyomott, mind a húzott oldalon lévő szélső szálakban és azok környezetében már megindult a folyás, tehát már mindkét oldalon plasztikus alakváltozások lépnek fel. A továbbiakban ezt az állapotot "teljesen plasztikus állapot"-nak fogjuk nevezni.

Megjegyezzük, hogy ezen feszültségmegoszlásokhoz tartozó fajlagos nyúlásokat az 5. ábra baloldalán eredményvonallal tüntettük fel. E vonalak azt mutatják, hogy egy képzelt dx hosszúságú elem kezdő és végkeresztmetszetének relatív szögelfordulása mekkora. A "C" állapotban a fajlagos nyúlás elméletileg végtelen s a keresztmetszet szögelfordulása $\pi/2$. Ez utóbbi esetben a fajlagos nyúlás és a szögelfordulás fogalmazása már természetesen csupán formai.

A feszültségállapot jellemzésére szolgáljanak az 5. ábrán bejelölt $\sigma_0, \sigma'_0, \sigma_f, z_0, t$ mennyiségek. A σ_0 ill. σ'_0 a keresztmetszet nyomott ill. húzott oldalán lévő szélső szálban fellépő feszültségeket jelenti, ha azok a rugalmassági határon belül esnek. Legyen n , a σ_f/σ_a viszony, ahol $\sigma_a = N/Ah$, vagyis a feszültség átlagos értéke. n tehát a terhelő erővel fordítva arányos mennyiség. Az 5. ábrán feltüntetett feszültségállapotok mindegyikéhez

természetesen valamely N , e értékpár tartozik. N , e és a keresztmetszeten fellépő megoszló feszültségek közötti összefüggés felírása végett felhasználjuk a

$$N = a \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma dz$$

$$eN = a \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma z dz$$

egyenleteket, amelyek a külső és belső erők sztatikai egyenértékűségét fejezik ki. Így az 5. ábrán feltüntetett esetekre a (1), (2), (3), (4), (5), (6) összefüggéseket kapjuk.

Az "1" esetben: az egyensúlyi feltételek

$$N = a h \sigma_a$$

$$eN = \frac{a h^2}{6} (\sigma_o - \sigma_a)$$

Felírható a dx hosszúságú elem fajlagos szögelfordulása is (5. ábra), mégpedig

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\varepsilon}{Z_o} = \frac{1}{E} \frac{\sigma_o}{Z_o} = \frac{1}{E} \frac{12 \sigma_a}{h^2} e \quad (1)$$

formában.

Az "A" esetben

$$\sigma_o = \sigma_f$$

és így

$$e = h \frac{n-1}{6} \quad (2)$$

A "2" esetben az egyensúlyi feltételek

$$N = a h \sigma_f - \frac{a}{2} (\sigma_o' + \sigma_f) (Z_o + t)$$

$$(e + \frac{h}{2}) N = \frac{a h^2}{2} \sigma_f - \frac{a}{6} (\sigma_o' + \sigma_f) (Z_o + t)^2$$

a dx hosszúságú elem fajlagos szögelfordulása (5.

ábra) pedig α $Z_o : t = \sigma_f : \sigma_o'$ reláció figyelembevételével

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\varepsilon_o}{Z_o} = \frac{1}{E} \frac{\sigma_f}{Z_o} = \frac{1}{E} \frac{2h\sigma_f}{9n} \frac{(n-1)^3}{\left[\frac{h}{2}(n-1) - e\right]^2} \quad (3)$$

formában.

A "B" esetben

$$\sigma_o' = \sigma_f \quad \text{és} \quad t = Z_o$$

és így

$$e = h \frac{n^2 + n - 2}{6n} = h \frac{n-1}{6} \frac{n+2}{n} \quad (4)$$

a "3" esetben az egyensúlyi feltételek a következők:

$$N = a \sigma_f (h - 2t)$$

$$\left(\frac{h}{2} - t + e\right) N = a \sigma_f \left[\frac{t^2}{2} + \frac{(h-t)^2}{2} - \frac{Z_o^2}{3}\right]$$

A dx hosszúságú elem fajlagos szögelfordulása (5. ábra) pedig

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{\varepsilon_0}{z_0} = \frac{1}{E} \frac{\sigma_f}{z_0} = \frac{\sigma_f}{E} \sqrt{\frac{n}{3h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{h}{4} \frac{n^2-1}{n} - e}} \quad (5)$$

formában.

A "C" esetben

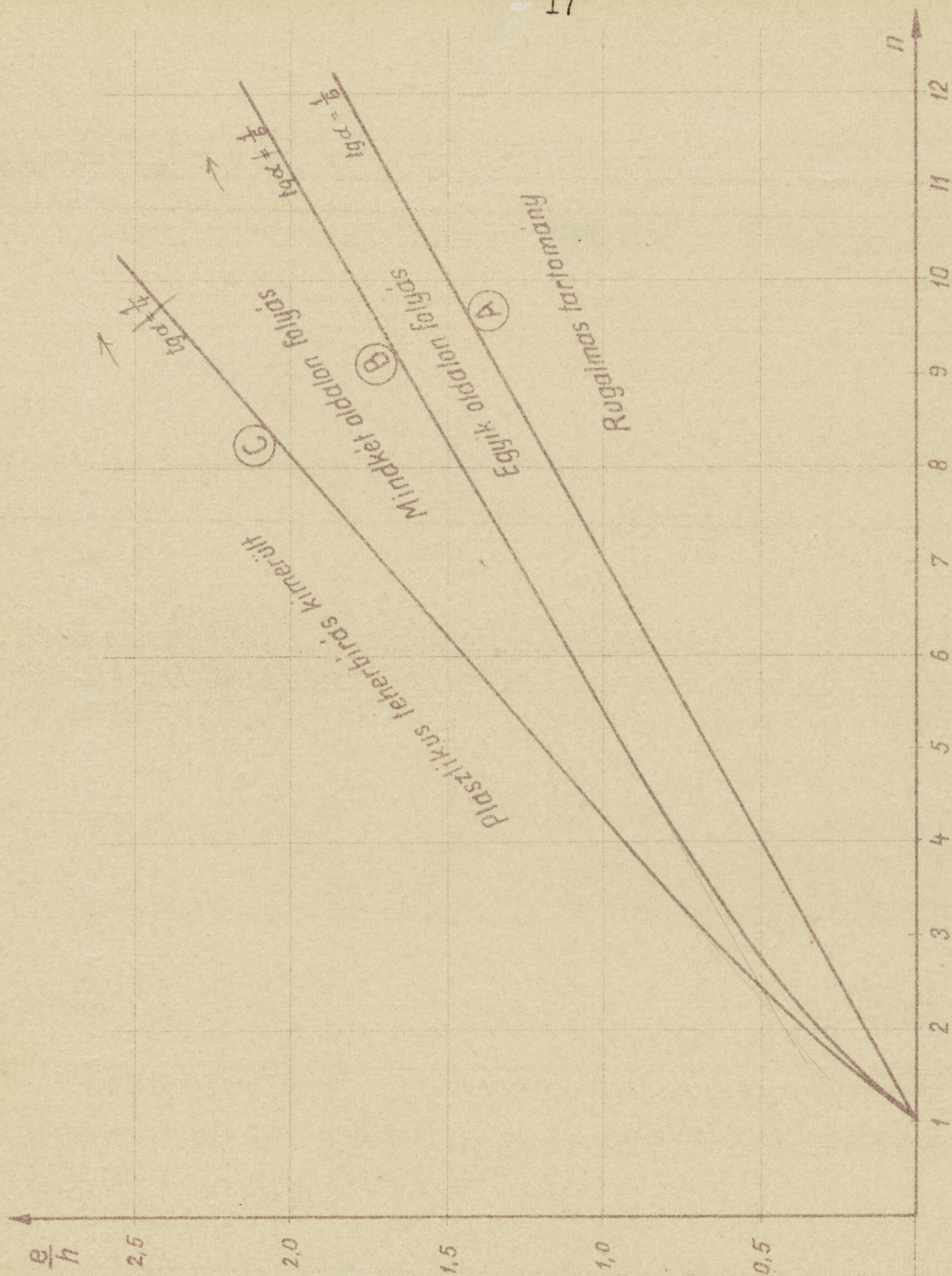
$$z_0 = 0$$

és így

$$e = h \frac{n^2-1}{4n} = h \frac{n-1}{6} \frac{n+1}{n} \frac{3}{2} \quad (6)$$

Már most azt a kérdést, hogy N , e mennyiségekkel jellemzett teher a feszültségmegoszlás melyik fajtáját (rugalmas, félig plasztikus vagy teljesen plasztikus) idézi elő, a levezetett (1), (2), (3), (4), (5), (6) képletekkel lehet eldönteni. Az összefüggések szemléltetése céljából vegyük szemügyre az n , e/h tengelykereszt síkját (6. ábra). Az e/h viszony a relatív különbség. Minthogy egy bizonyos keresztmetszet esetében az abszcissza közvetlenül és egyértelműen N -től függ, az ordináta pedig ugyanígy függ e -től, könnyen belátható, hogy minden tehernek megfelel egy pont a tengelykereszt síkjában. Az egyes mezők a feszültségmegoszlás más-más fajtájának felelnek meg. A mezők közötti határokat a (2), (4), (6) feltételeknek elegendő teher idézi elő.

Igy lehet a 6. ábra segítségével egyszerűen eldönteni, hogy adott N , e ill. n , e/h viszony esetében a keresztmetszetben milyen feszültségi állapot uralkodik, mégpedig oly módon, hogy ezen értékpárhoz rendelhető pont a grafikonon melyik mezőbe esik.



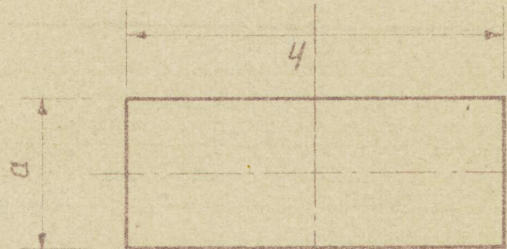
$$n = \sigma_f / \sigma_a$$

6. ábra

(C) $\frac{e_c}{h} = \frac{n^2 - 1}{4n}$

(B) $\frac{e_b}{h} = \frac{n^2 + n - 2}{6n}$

(A) $\frac{e_a}{h} = \frac{n - 1}{6}$



A meggömbült rúdtengely differenciálegyenletei és azok általános megoldása

Az eredetileg egyenes rúdtengely a teher hatására meggömbül, s a görbület mértéke, amint azt fentiekben már kifejtettük ε_0/z_0 . Következésképpen

$$y'' = - \frac{d\alpha}{dx} = - \frac{\varepsilon_0}{z_0}$$

ahol ε_0/z_0 értékét az egyes szakaszokon (1), (3), (5) egyenletekkel kell behelyettesíteni. Tehát a differenciálegyenlet alakja az egyes szakaszokon a következő:

a./ Rugalmas szakaszon ("1" eset)

$$y'' = - \frac{1}{E} \frac{12 \sigma_f}{h^2 \pi} (e_0 + y)$$

ha bevezetjük az

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{E} \frac{12 \sigma_f}{h^2 \pi} \quad (7)$$

jelölést, a differenciálegyenlet

$$y'' = - \alpha_1^2 (e_0 + y) \quad (8)$$

alakban írható fel. Ezen egyenlet általános megoldása, mint ismeretes

$$y = A_1 \cos \alpha_1 x + B_1 \sin \alpha_1 x - e_0 \quad (9)$$

és ebből

$$y' = - \alpha_1 A_1 \sin \alpha_1 x + \alpha_1 B_1 \cos \alpha_1 x \quad (10)$$

ahol A_1 és B_1 integrálási állandók, melyeket a kerületi feltételekből fogunk meghatározni.

b./ Félig plasztikus szakaszon ("2" eset)

$$y'' = - \frac{2}{9} \frac{\sigma_f}{E} \frac{(n-1)^3}{n} h \frac{1}{\left[\frac{h}{2} (n-1) - e_0 - y \right]^2}$$

ha bevezetjük

$$\alpha_2^2 = \frac{2}{9} \frac{\sigma_f}{E} \frac{(n-1)^3}{n} h \quad (11)$$

$$\beta_2 = \frac{h}{2} (n-1) - e_0 \quad (12)$$

jelölést, a differenciálegyenlet

$$y'' = - \frac{\alpha_2^2}{(\beta_2 - y)^2} \quad (13)$$

alakban írható fel. Ezen egyenlet általános megoldása, - amint arról behelyettesítéssel meggyőződhetünk - a következő:

$$x + A_2 = - \frac{2\alpha_2^2}{\sqrt{B_2^3}} \left\{ \sqrt{\frac{\beta_2 - y}{2\alpha_2^2} B_2} \sqrt{\frac{\beta_2 - y}{2\alpha_2^2} B_2 - 1} + \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta_2 - y}{2\alpha_2^2} B_2} \right\} \quad (14)$$

és

$$y' = \sqrt{B_2 - \frac{2\alpha_2^2}{\beta_2 - y}} \quad (15)$$

ahol A_2 és B_2 integrálási állandók, amelyeket majd a kerületi feltételekből fogunk meghatározni.

c./ Teljesenelasztikus szakaszon ("3" eset)

$$y'' = - \frac{\sigma_f}{E} \sqrt{\frac{n}{3h}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{h}{4} \frac{n^2-1}{n} - e_0 - y}}$$

ha bevezetjük

$$\alpha_3^2 = \frac{\sigma_f}{E} \sqrt{\frac{n}{3h}} \quad (16)$$

$$\beta_3 = \frac{h}{4} \frac{n^2-1}{n} - e_0 \quad (17)$$

jelöléseket, a differenciálegyenlet

$$y'' = - \frac{\alpha_3^2}{\sqrt{\beta_3 - y}} \quad (18)$$

alakban írható fel. Ezen egyenlet általános megoldása - amint arról behelyettesítéssel meggyőződhetünk - a következő:

$$x + A_3 = \frac{1}{12\alpha_3^4} \left(2\beta_3 - 4\alpha_3^2 \sqrt{\beta_3 - y} \right) \sqrt{\beta_3 + 4\alpha_3^2 \sqrt{\beta_3 - y}} \quad (19)$$

és ebből

$$y' = \sqrt{\beta_3 + 4\alpha_3^2 \sqrt{\beta_3 - y}} \quad (20)$$

ahol A_3 és B_3 integrálási állandók, amelyeket majd a kerületi feltételekből fogunk meghatározni.

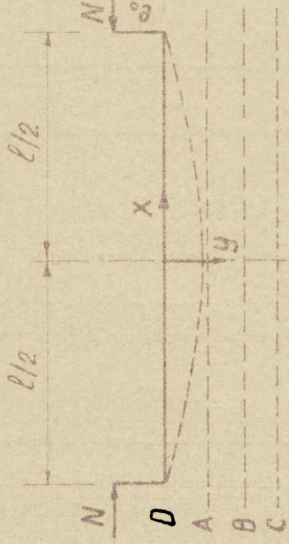
A rúd meggörbült tengelyének egyenlete

Az imént levezetett általános megoldás segítségével akarjuk most meghatározni a meggörbült rúd-tengely alakját, vagyis az általános megoldásokban szereplő integrálási állandókat hozzá akarjuk simítani a kerületi feltételekhez.

Mielőtt a számítás részleteibe bocsátkoznánk, képzeljük el azokat a különböző eseteket, amelyeket a 7. ábrán tüntettünk fel. Itt, a rúd egyes szakaszai abból a szempontból vannak megkülönböztetve, hogy a zokon a feszültségállapot melyik fajtája keletkezik. Így pl. az A-A esetben az egész rúdon véges-végig csak egyféle szakasz keletkezik, mégpedig olyan, amelyben csak rugalmas feszültségi állapot van. Az A-B esetben a rúd szélső szakaszain rugalmas, középső szakaszán pedig félig plasztikus állapot van. B-B esetben a rúd teljes hosszán félig plasztikus állapot van. A-C esetben a rúd szélső szakaszain rugalmas, az ehhez csatlakozó szakaszokon félig plasztikus, középső szakaszán pedig teljesen plasztikus állapotban van. B-C esetben a rúd szélső szakaszain félig plasztikus, míg középső részén teljesen plasztikus állapot van, és végül C-C esetben a rúd teljes hosszán teljesen plasztikus állapotban van.

Továbbiakban tehát e lehetséges hat esetet vizsgáljuk meg külön-külön.

Rugalmas

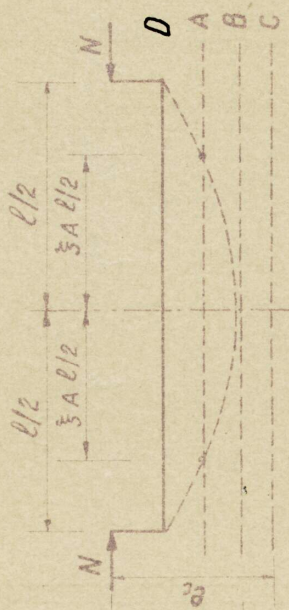


A-A

$$0 \leq e_0 \leq e_A$$

$$0 \leq e_0 + y_{max} \leq e_A$$

Félig plasztikus

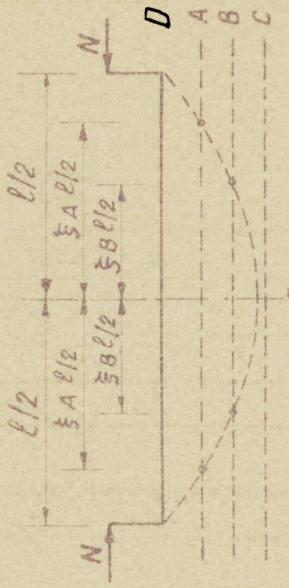


A-B

$$0 \leq e_0 \leq e_A$$

$$e_A \leq e_0 + y_{max} \leq e_B$$

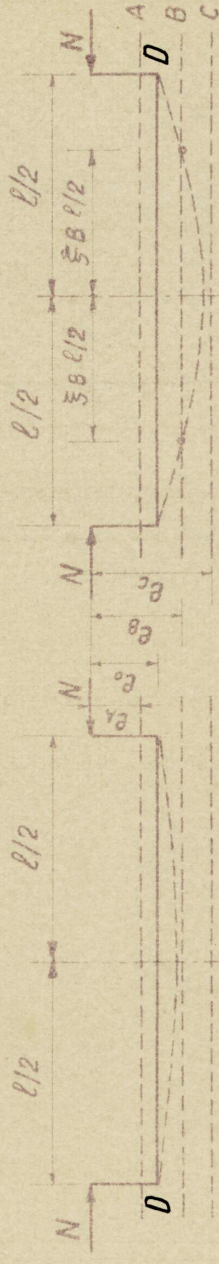
plasztikus



A-C

$$0 \leq e_0 \leq e_A$$

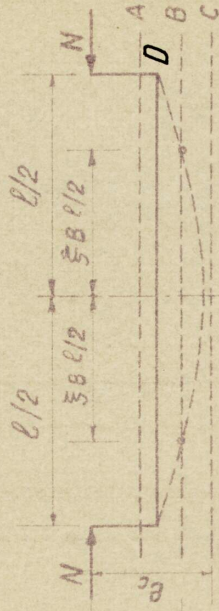
$$e_B \leq e_0 + y_{max} \leq e_C$$



B-B

$$e_A \leq e_0 \leq e_B$$

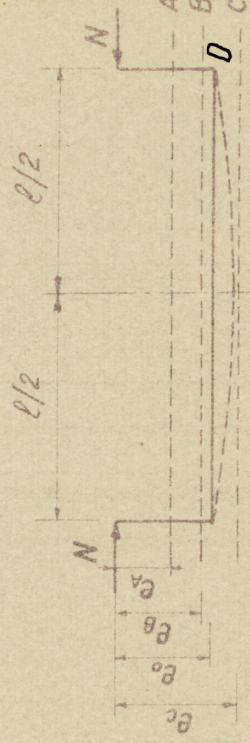
$$e_A \leq e_0 + y_{max} \leq e_B$$



B-C

$$e_A \leq e_0 \leq e_B$$

$$e_B \leq e_0 + y_{max} \leq e_C$$



C-C

$$e_B \leq e_0 \leq e_C$$

$$e_B \leq e_0 + y_{max} \leq e_C$$

7. ábra.

A-A eset (7. ábra).

Adott méretű és hosszúságú rúd esetében N , e_0 paraméterpárt válasszunk meg úgy, hogy a teher hatására a rúd teljes hosszán rugalmas állapot keletkezzen, vagyis legyen

$$0 \leq e_0 \leq e_A$$

és

$$0 \leq e_0 + y_{\max} \leq e_A$$

Ekkor a rúd teljes hosszán a (8) differenciálegyenlet érvényes, a kerületi feltételek pedig a következők:

$$\begin{array}{ll} \text{D pontban} & x = + \ell/2 & y = 0 \\ \text{E pontban} & x = 0 & y' = 0 \end{array}$$

Ezeket az értékeket (9), (10) egyenletekbe helyettesítvén

$$0 = A_1 \cos \alpha_1 \frac{\ell}{2} + B_1 \sin \alpha_1 \frac{\ell}{2} - e_0$$

$$0 = \alpha_1 B_1$$

összefüggéseket kapjuk, melyekből

$$B_1 = 0$$

$$A_1 = \frac{e_0}{\cos \alpha_1 \frac{\ell}{2}} ; \text{ ha } \cos \alpha_1 \frac{\ell}{2} \neq 0$$

tehát a meggörbült rúdtengely egyenlete

$$y = e_0 \frac{\cos \alpha_1 x}{\cos \alpha_1 \frac{\ell}{2}} - e_0$$

alakban írható. A legnagyobb meggörbülés a rúd-középen, $x = 0$ helyen, következik be, nagysága

$$y_{\max} = e_0 \frac{1}{\cos \alpha_1 \frac{\ell}{2}} - e_0 \quad (21)$$

A-B eset (7. ábra)

Adott méretű és hosszúságú rúd esetében N , e_0 paraméterpárt válasszuk meg úgy, hogy a teher hatására a rúd szélein rugalmas, középső szakaszán pedig félig plasztikus állapot keletkezzék, vagyis legyen

$$0 \leq e_0 \leq e_A$$

és

$$e_A \leq e_0 + y_{\max} \leq e_B$$

Ekkor a differenciálegyenlet a rúd szélső szakaszain a (8) alakban, középső szakaszán pedig a (13) alakban irandó fel. Ebben az esetben a kerületi feltételek a következők:

D-A szakaszra

$$\begin{array}{ll} \text{D pontban} & x = + \frac{\ell}{2} \quad y = 0 \\ \text{A pontban} & x = + \xi_A \frac{\ell}{2} \quad y = \frac{h}{6} (n-1) - e_0 = y_A \end{array}$$

A-E szakaszra

$$\begin{array}{ll} \text{A pontban} & x = + \xi_A \frac{\ell}{2} \quad y = \frac{h}{6} (n-1) - e_0 = y_A \\ \text{E pontban} & x = 0 \quad y' = 0 \end{array}$$

Ezenfelül felírhatjuk azt, hogy a szakaszok határán a görbék érintője közös, tehát

$$\text{A pontban} \quad x = + \xi_A \frac{\ell}{2} \quad y'_{D-A} = y'_{A-E}$$

Ezeket az értékeket a (9), (10), (14), (15) egyenletekbe helyettesítvén

$$e_0 = A_1 \cos \alpha_1 \frac{\ell}{2} + B_1 \sin \alpha_1 \frac{\ell}{2} \quad (22)$$

$$h \frac{n-1}{6} = A_1 \cos \alpha_1 \frac{\ell}{2} \xi_A + B_1 \sin \alpha_1 \frac{\ell}{2} \xi_A \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \xi_A \frac{\ell}{2} + A_2 = & -\frac{2 \alpha_2^2}{\sqrt{B_2^3}} \left(-\sqrt{\frac{\beta_2 - y_A}{2 \alpha_2^2} B_2} \sqrt{\frac{\beta_2 - y_A}{2 \alpha_2^2} B_2 - 1} - \right. \\ & \left. - \operatorname{arch} \sqrt{\frac{\beta_2 - y_A}{2 \alpha_2^2} B_2} \right) \end{aligned} \quad (24)$$

$$0 = -\sqrt{B_2 - \frac{2 \alpha_2^2}{\beta_2 - y_{\max}}} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} -\alpha_1 A_1 \sin \alpha_1 \frac{\ell}{2} \xi_A + \alpha_1 B_1 \cos \alpha_1 \frac{\ell}{2} \xi_A = \\ = -\sqrt{B_2 - \frac{2 \alpha_2^2}{\beta_2 - y_A}} \end{aligned} \quad (26)$$

összefüggéseket kapjuk, amelyekben A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , ξ_A ismeretlenek szerepelnek, melyek ezen egyenletekből elvileg meghatározhatók. Az így meghatározott állandókat a (9), (14) egyenletekbe visszahelyettesítve, megkaphatjuk a meggörbült rúdtengely egyenletét. Ennek ismeretében a rúdközépen $x = 0$ helyen, megállapítható y_{\max} értéke.

B-B eset (7. ábra)

Adott méretű és hosszúságú rúd esetében N , e_0 paraméterpárt válasszunk meg úgy, hogy a teher a rúd teljes hosszán félig plasztikus állapotot idézzon elő, vagyis legyen

$$e_A \leq e_0 \leq e_B$$

és

$$e_A \leq e_0 + y_{\max} \leq e_B$$

Ekkor a rúd teljes hosszán a (13) differenciálegyenlet érvényes, a kerületi feltételek pedig a következők:

D pontban	$x = \frac{\ell}{2}$	$y = 0$
E pontban	$x = 0$	$y' = 0$

Ezeket az értékeket a (14), (15) egyenletekbe helyettesítvén

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{2} + A_2 = & -\frac{2\alpha_2^2}{\sqrt{B_2^3}} \left\{ -\sqrt{\frac{\beta_2}{2\alpha_2^2} B_2} \sqrt{\frac{\beta_2}{2\alpha_2^2} B_2 - 1} - \right. \\ & \left. - \operatorname{arch} \sqrt{\frac{\beta_2}{2\alpha_2^2} B_2} \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

$$0 = \sqrt{B_2 - \frac{2\alpha_2^2}{\beta_2 - y_{\max}}} \quad (28)$$

összefüggéseket kapjuk, melyekben A_2 , B_2 ismeretlenek szerepelnek. Ezek a fenti egyenletekből meghatározhatók. Az állandók így meghatározott értékeit a (14) egyenletbe visszahelyettesítve, megkaphatjuk a meggörbült rúdtengely egyenletét. Ennek ismeretében a rúd-középen, $x = 0$ helyen, megállapítható y_{\max} értéke.

A-C eset (7. ábra)

Adott méretű és hosszúságú rúd esetében N , e_0 paraméterpárt válasszunk meg úgy, hogy a teher hatására a rúd szélső szakaszain rugalmas, az ehhez csatlakozó *hálózati* félig plasztikus, a középső szakaszán pedig teljesen plasztikus állapot keletkezzék, vagyis

$$0 \leq e_o \leq e_A$$

és

$$e_B \leq e_o + y_{\max} \leq e_C$$

legyen, akkor a differenciálegyenlet a rúd szélső szakaszain a (8), az ehhez csatlakozó szakaszain a (13), középső szakaszán pedig a (18) alakban irandó fel. A kerületi feltételek pedig a következők:

D-A szakaszra

$$\begin{aligned} \text{D pontban } x &= \frac{l}{2} & y &= 0 \\ \text{A pontban } x &= \xi_A \frac{l}{2} & y &= h \frac{n-1}{6} - e_o = y_A \end{aligned}$$

A-B szakaszra

$$\begin{aligned} \text{A pontban } x &= \xi_A \frac{l}{2} & y &= h \frac{n-1}{6} - e_o = y_A \\ \text{B pontban } x &= \xi_B \frac{l}{2} & y &= h \frac{n-1}{6} \frac{n+2}{n} - e_o = y_B \end{aligned}$$

B-E szakaszra

$$\begin{aligned} \text{B pontban } x &= \xi_B \frac{l}{2} & y &= h \frac{n-1}{6} \frac{n+2}{n} - e_o = y_B \\ \text{E pontban } x &= 0 & y' &= 0 \end{aligned}$$

Ezen felül felírhatjuk, hogy a szakaszok határán a görbék érintője közös

$$\begin{aligned} \text{A pontban } x &= \xi_A \frac{l}{2} & y'_{D-A} &= y'_{A-B} \\ \text{B pontban } x &= \xi_B \frac{l}{2} & y'_{A-B} &= y'_{B-E} \end{aligned}$$

Ezeket az értékeket a (9), (10), (14), (15), (19), (20) egyenletekbe helyettesítvén

$$e_o = A_1 \cos \alpha_1 \frac{l}{2} + B_1 \sin \alpha_1 \frac{l}{2} \quad (29)$$

$$h \frac{n-1}{6} = A_1 \cos \alpha_1 \frac{l}{2} \xi_A + B_1 \sin \alpha_1 \frac{l}{2} \xi_A \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \xi_A \frac{l}{2} + A_2 = & - \frac{2\alpha_2^2}{\sqrt{B_2^2}} \left\{ - \sqrt{\frac{\beta_2 - y_A}{2\alpha_2^2} B_2} \sqrt{\frac{\beta_2 - y_A}{2\alpha_2^2} B_2 - 1} - \right. \\ & \left. - \operatorname{arch} \sqrt{\frac{\beta_2 - y_A}{2\alpha_2^2} B_2} \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\xi_B \frac{l}{2} + A_2 = - \frac{2\alpha_2^2}{\sqrt{B_2^3}} \left\{ - \sqrt{\frac{\beta_2 - y_B}{2\alpha_2^2} B_2} \sqrt{\frac{\beta_2 - y_B}{2\alpha_2^2} B_2 - 1} - \right. \quad (32)$$

$$\left. - \operatorname{arch} \sqrt{\frac{\beta_2 - y_B}{2\alpha_2^2} B_2} \right\}$$

$$\xi_B \frac{l}{2} + A_3 = - \frac{1}{12\alpha_3^4} \left(2B_3 - 4\alpha_3^2 \sqrt{\beta_3 - y_B} \right) \sqrt{B_3 + 4\alpha_3^2 \sqrt{\beta_3 - y_B}} \quad (33)$$

$$0 = - \sqrt{B_3 + 4\alpha_3^2 \sqrt{\beta_3 - y_{\max}}} \quad (34)$$

$$-\alpha_1 A_1 \sin \alpha_1 \frac{l}{2} \xi_A + \alpha_1 B_1 \cos \alpha_1 \frac{l}{2} \xi_A = - \sqrt{B_2 - \frac{2\alpha_2^2}{\beta_2 - y_A}} \quad (35)$$

$$- \sqrt{B_2 - \frac{2\alpha_2^2}{\beta_2 - y_B}} = - \sqrt{B_3 + 4\alpha_3^2 \sqrt{\beta_3 - y_B}} \quad (36)$$

Összefüggéseket kapjuk, melyekben az $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, \xi_A, \xi_B$ ismeretlenek szerepelnek, melyekre a szóbanforgó egyenletrendszer elvileg megoldható. Az állandók így meghatározott értékeit a (9), (14), (19) egyenletekbe visszahelyettesítve, megkaphatjuk a meggörbült rúdtengely egyenletét. Ennek ismeretében a rúdközépen, $x = 0$ helyen, megállapítható y_{\max} értéke.

B-C eset (7. ábra)

Adott méretű és hosszúságú rúd esetében N, e_0 paraméterpárt úgy válasszuk meg, hogy a rúd szélein félig plasztikus, középső szakaszán pedig teljesen plasztikus állapot keletkezzék, vagyis legyen

$$e_A \leq e_0 \leq e_B$$

és $e_A \leq e_0 + y_{\max} \leq e_B$

Ekkor a differenciálegyenlet a rúd szélein a (13), középső szakaszán pedig a (18) alakban irandó fel, a kerületi feltételek pedig a következők:

D-B szakaszra

$$\begin{aligned} \text{D pontban} \quad x &= \frac{\ell}{2} & y &= 0 \\ \text{B pontban} \quad x &= \xi_B \frac{\ell}{2} & y &= h \frac{n-1}{6} \frac{n+2}{n} - e_0 = y_B \end{aligned}$$

B-E szakaszra

$$\begin{aligned} \text{B pontban} \quad x &= \xi_B \frac{\ell}{2} & y &= h \frac{n-1}{6} \frac{n+2}{n} - e_0 = y_B \\ \text{E pontban} \quad x &= 0 & y' &= 0 \end{aligned}$$

Ezen felül felírhatjuk, hogy a B pontban a két görbe érintője közös, tehát

$$\text{B pontban} \quad x = \xi_B \frac{\ell}{2} \quad y'_{D-B} = y'_{B-E}$$

Ezeket az értékeket a (14), (15), (19), (20) egyenletekbe helyettesítvén

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{2} + A_2 = - \frac{2\alpha_2^2}{\sqrt{B_2^3}} \left\{ - \sqrt{\frac{\beta_2}{2\alpha_2^2} B_2} \sqrt{\frac{\beta_2}{2\alpha_2^2} B_2 - 1} - \right. \\ \left. - \operatorname{arch} \sqrt{\frac{\beta_2}{2\alpha_2^2} B_2} \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \xi_B \frac{\ell}{2} + A_2 = - \frac{2\alpha_2^2}{\sqrt{B_2^3}} \left\{ - \sqrt{\frac{\beta_2 - y_B}{2\alpha_2^2} B_2} \sqrt{\frac{\beta_2 - y_B}{2\alpha_2^2} B_2 - 1} - \right. \\ \left. - \operatorname{arch} \sqrt{\frac{\beta_2 - y_B}{2\alpha_2^2} B_2} \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\xi_B \frac{\ell}{2} + A_3 = - \frac{1}{12\alpha_3^4} \left(2B_3 - 4\alpha_3^2 \sqrt{\beta_3 - y_B} \right) \sqrt{B_3 + 4\alpha_3^2 \sqrt{\beta_3 - y_B}} \quad (39)$$

$$\sqrt{B_3 + 4\alpha_3^2} \sqrt{\beta_3 - y_{\max}} = 0 \quad (40)$$

$$-\sqrt{B_2 - \frac{2\alpha_2^2}{\beta_2 - y_B}} = -\sqrt{B_3 + 4\alpha_3^2} \sqrt{\beta_3 - y_B} \quad (41)$$

összefüggéseket kapjuk, melyekben az A_2, A_3, B_2, B_3 és ξ_B ismeretlenek szerepelnek, melyek szóbanforgó egyenletrendszerből elvileg meghatározhatók. Az állandók így meghatározott értékeit a (14), (19) egyenletekbe visszahelyettesítve, megkaphatjuk a meggörbült rúdtengely egyenletét. Ennek ismeretében a rúd-középen, $x = 0$ helyen, megállapítható y_{\max} értéke.

C-C eset (7. ábra)

Adott méretű és hosszúságú rúd esetében N, e_0 paraméterpárt válasszunk meg úgy, hogy a teher hatására a rúd teljes hosszán teljesen plastikus állapot keletkezzék, vagyis legyen

$$e_B \leq e_0 \leq e_C$$

és

$$e_B \leq e_0 + y_{\max} \leq e_C$$

Ekkor a rúd teljes hosszán a (18) differenciálegyenlet érvényes, a kerületi feltételek pedig a következők:

$$\begin{array}{lll} \text{D pontban} & x = \frac{l}{2} & y = 0 \\ \text{E pontban} & x = 0 & y' = 0 \end{array}$$

Ezeket az értékeket a (19), (20) egyenletekbe helyettesítve

$$\frac{l}{2} + A_3 = -\frac{1}{12\alpha_3^4} \left(2B_3 - 4\alpha_3^2 \sqrt{\beta_3} \right) \sqrt{B_3 + 4\alpha_3^2 \sqrt{\beta_3}} \quad (42)$$

$$0 = -\sqrt{B_3 + 4\alpha_3^2 \sqrt{\beta_3 - y_{\max}}} \quad (43)$$

összefüggéseket kapjuk, amelyekben A_3 , B_3 ismeretlenek szerepelnek. Ezek az egyenletrendszerből elvileg megoldhatók. Az állandók így meghatározott értékeit a (19) egyenletbe visszahelyettesítve, megkaphatjuk a meggörbült rúdtengely egyenletét. Ennek ismeretében a rúdközépen, $x = 0$ helyen, megállapítható y_{\max} értéke.

4. § Határteherbirás

Jelen paragrafusban a rúd határteherbirását akarjuk meghatározni, vagyis meg akarjuk határozni azon N , e_0 értékpárok összességét, amelyek a rúdban, (mégpedig a rúd középső keresztmetszetében) határállapotot idézhetnek elő. Mielőtt azonban ezt megtennénk, néhány szót kell szólni a középső keresztmetszet metszeti erőjéről.

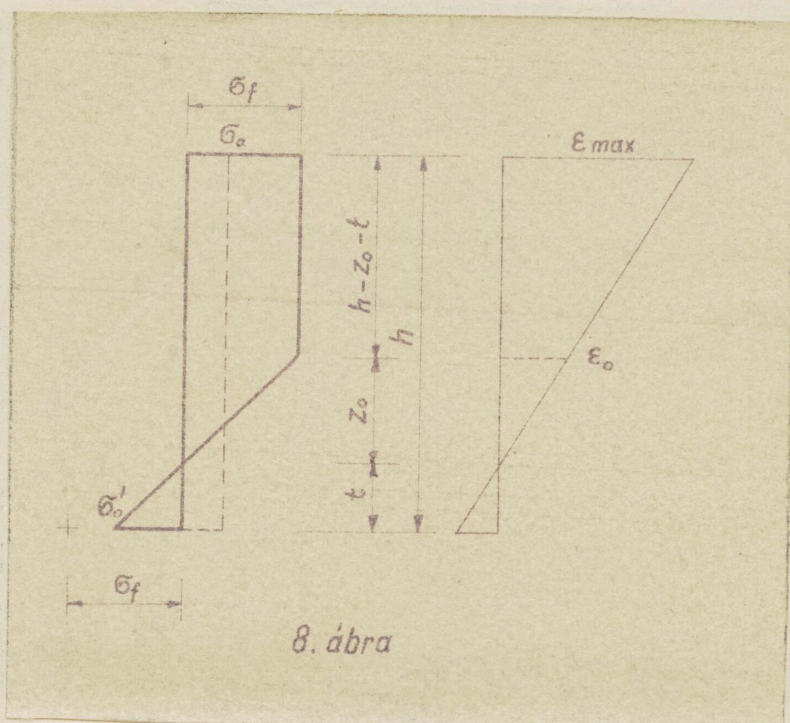
A középső keresztmetszet metszeti erőjének jellemzésére az N , $e = e_0 + y_{\max}$ értékpár szolgál. A matematika nyelvén szólva azt kell mondani, hogy a középső keresztmetszet metszeti erője kétszeresen végtelen sokféle lehet. És most kérdezzük azt, hogy ezen metszeri erők közül melyek azok, amelyek a középső keresztmetszetet határállapotba juttathatják. Vagyis adjuk meg azt a feltételt, amelyet azon N , e érték-

párok elégitenek ki, amelyek a középső keresztmetszetet határállapotba juttathatják. Ez a feltétel a következő: a metszeti erő akkor juttathatja a középső keresztmetszetet határállapotba, ha az N , e értékpár kielégíti a most levezetendő (44), (45) egyenletek valamelyikét. A (44) egyenlet kielégítése esetében a középső keresztmetszetek határállapota a 8. ábra szerinti, míg a (45) egyenlet kielégítése esetében a 9. ábra szerinti.

A határállapot a 2.§ definíciója szerint akkor következik be, amikor a rúd középső keresztmetszetének nyomott oldali szélső szálában éppen a határnyúlás keletkezik, vagyis a 8. és 9. ábrák alapján akkor, ha

$$\eta = \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_0} = \frac{h-t}{Z_0}$$

A 8. ábrán feltüntetett feszültségmegoszlásfajta esetében a keresztmetszet a "2" állapotban van és az egyensúlyi egyenletek alapján



$$\mathcal{Z}_0 = \frac{g}{2} \frac{n}{h} \frac{\left[\frac{h}{2}(n-1) - e\right]^2}{(n-1)^3}$$

$$t = 3 \frac{\left[\frac{h}{2}(n-1) - e\right]}{(n-1)} - \frac{g}{2} \frac{n}{h} \frac{\left[\frac{h}{2}(n-1) - e\right]^2}{(n-1)^3}$$

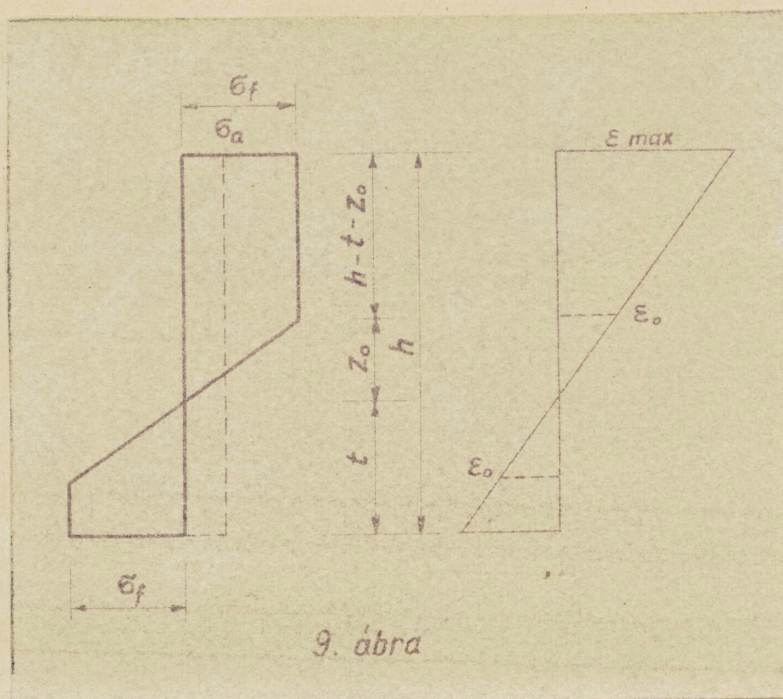
Tehát a határállapotot előidéző N , e értékpárok feltételi egyenlete a

$$\mathcal{J} = \frac{h-3}{\frac{g}{2} \frac{n}{h} \frac{\left[\frac{h}{2}(n-1) - e\right]^2}{(n-1)^3} + 1}$$

vagy e -re megoldva

$$e = h \frac{n-1}{2} + \frac{h}{\mathcal{J}-1} \frac{(n-1)^2}{3n} \left[1 \pm \sqrt{1 + (\mathcal{J}-1) \frac{2n}{n-1}} \right] \quad (44)$$

A 9. ábrán feltüntetett feszültségmegoszlás fajta esetében a keresztmetszet "3" állapotban van és az egyensúlyi egyenletek alapján



$$t = \frac{h}{2} \frac{n-1}{n}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{3h}{n}} \sqrt{\frac{h}{4} \frac{n^2-1}{n} - e}$$

Tehát a határállapotot előidéző N , e értékpárok feltételi egyenlete a

$$j' = \frac{h - \frac{h}{2} \frac{n-1}{n}}{\sqrt{\frac{3h}{n}} \sqrt{\frac{h}{4} \frac{n^2-1}{n} - e}}$$

vagy e -re megoldva

$$e = \frac{h}{12n} \left[3(n^2-1) - \left(\frac{n+1}{j'} \right)^2 \right] \quad (45)$$

összefüggés.

A határállapotot előidéző N , e_0 értékpárok tehát két csoportra oszlanak. Az egyik csoport a (44), a másik a (45) egyenletet elégíti ki, de lesz olyan is, mely mindkét feltételi egyenletnek eleget tesz. A két csoport közötti határt éppen ez az értékpár fogja alkotni. Könnyen kiszámítható, hogy ennek feltételi egyenlete

$$j' = \frac{n+1}{n-1} \quad (46)$$

vagy n -re megoldva

$$n = \frac{j'+1}{j'-1} \quad (47)$$

összefüggés.

Teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy e számítási mód kiterjeszthető a korlátozott szilárdságú ideálisan rugalmas anyagokra is, amikor a feszültségmegoszlás

fajta csak "1" állapot szerinti (5. ábra) lehet. Ilyen anyagoknál $\lambda = 1$ és a határállapotot előidéző N , e értékpárok feltételi egyenlete a (2) egyenlet, vagyis az

$$e = \frac{h}{6} (n-1)$$

összefüggés.

Visszatérvén a rúd teherbirásának meghatározására, nem kell mást tenni, mint a 3.§-ban meghatározott $e_0 + y_{\max}$ értéket egyenlővé tenni a most körülírt értékkel. Ily módon a 7. ábrán feltüntetett hatféle esetnek megfelelően a (48), (49), (50), (51), (52), (53) egyenleteket fogjuk kapni. Ezen egyenletek alapján azután kiszámíthatók azon N , e_0 értékpárok, melyek keresését jelen paragrafus bevezető soraiban célul tűztünk ki. Most tehát le fogjuk vezetni a (48), (49), (50), (51), (52), (53) képleteket, míg azok felhasználását - numerikus példa kapcsán - majd a 6.§-ban fogjuk bemutatni.

A-A eset

Annak feltétele, hogy a rúd középső keresztmetszete határállapotba juthasson, ebben az esetben

$$e_0 + y_{\max} = \frac{h}{6} (n-1)$$

Ezt a (21) egyenletbe helyettesítve

$$e_0 = \frac{h}{6} (n-1) \cos \alpha, \frac{\ell}{2}$$

összefüggést kapjuk.

Az állandókat behelyettesítve és rendezve, a rúd határállapotát előidéző N , e_0 vagy ami ugyanaz, n , e_0

értékpárok feltételi egyenlete a következő:

$$e_o = \frac{h}{6} (n-1) \cos \sqrt{\frac{\sigma_f \lambda^2}{4 E n}} \quad (48)$$

A-B eset

Annak feltétele, hogy a rúd középső keresztmetszete határállapotba juthasson, ebben az esetben

$$e_o + y_{max} = h \frac{n-1}{2} + \frac{h}{j-1} \frac{(n-1)^2}{3n} \left[1 \pm \sqrt{1 + (j-1) \frac{2n}{n-1}} \right]$$

Ezt, valamint az állandók (11), (12) értékeit (25) egyenletbe helyettesítve, meghatározható B_2 , tehát

$$B_2 = \frac{4}{3} \frac{\sigma_f}{E} (n-1) \left(\frac{j-1}{\sqrt{1 + (j-1) \frac{2n}{n-1}} - 1} \right) = \frac{4}{3} \frac{\sigma_f}{E} (n-1) A$$

ahol A-val a zárójelben lévő mennyiséget jelöljük.

A rúdtengely meggörbült alakja szimmetrikus lévén, $A_2 = 0$ és így a (24) egyenletből, B_2 , y_A és a (11), (12) állandók behelyettesítése után, meghatározható ξ_A , mégpedig

$$\xi_A = \sqrt{\frac{4 E n}{\sigma_f \lambda^2}} \sqrt{\frac{n-1}{n \cdot A}}^3 \left\{ \sqrt{\frac{n \cdot A}{n-1}} \sqrt{\frac{n \cdot A}{n-1} - 1} + \operatorname{arch} \sqrt{\frac{n \cdot A}{n-1}} \right\}$$

formában. A (22), (23) egyenletekből

$$A_1 = \frac{h \frac{n-1}{6} \sin \alpha_1 \frac{l}{2} - e_o \sin \alpha_1 \frac{l}{2} \xi_A}{\sin \alpha_1 \frac{l}{2} (1 - \xi_A)}$$

$$B_1 = \frac{-h \frac{n-1}{6} \cos \alpha_1 \frac{\ell}{2} - e_0 \cos \alpha_1 \frac{\ell}{2} \xi_A}{\sin \alpha_1 \frac{\ell}{2} (1 - \xi_A)}$$

és ezeket, valamint B_2 , ξ_A , (7), (11), (12), y_A állandók értékeit a (26) egyenletbe helyettesítve és rendezve

$$e_0 = \frac{h}{6} (n-1) \cos \left[\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_f \lambda^2}{4E n}} - \sqrt{\frac{n-1}{n \cdot A}}^3 \left\{ \sqrt{\frac{n \cdot A}{n-1}} \sqrt{\frac{n \cdot A}{n-1} - 1} + \operatorname{arch} \sqrt{\frac{n \cdot A}{n-1}} \right\} \right] -$$

$$- \frac{h}{6} (n-1) 2 \sqrt{\frac{n \cdot A}{n-1} - 1} \sin \left[\sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_f \lambda^2}{4E n}} - \sqrt{\frac{n-1}{n \cdot A}}^3 \left\{ \sqrt{\frac{n \cdot A}{n-1}} \sqrt{\frac{n \cdot A}{n-1} - 1} + \operatorname{arch} \sqrt{\frac{n \cdot A}{n-1}} \right\} \right] \quad (49)$$

összefüggésre jutunk. Ez tehát a határállapotot előidéző n , e_0 értékpárok feltételi egyenlete.

B-B eset

Annak feltétele, hogy a rúd középső keresztmetszete határállapotba juthasson, ebben az esetben szintén az

$$e_0 + y_{\max} = h \frac{n-1}{2} + \frac{h}{j-1} \frac{(n-1)^2}{3n} \left[1 \pm \sqrt{1 + (j-1) \frac{2n}{n-1}} \right]$$

összefüggés. Ezt, valamint az állandók (11), (12) értékeit (28) egyenletbe helyettesítve B_2 meghatározható. Tehát

$$B_2 = \frac{4}{3} \frac{\tilde{\sigma}_f}{E} (n-1) \left(\frac{j-1}{\sqrt{1 + (j-1) \frac{2n}{n-1}} - 1} \right) = \frac{4}{3} \frac{\tilde{\sigma}_f}{E} (n-1) A$$

ahol A -val a zárójelben lévő mennyiséget jelöljük.
 A rúdtengely kigömbült alakja szimmetrikus lévén,
 $A_2 = 0$ és így a (27) egyenletből, B_2 és a (11),
 (12) állandók behelyettesítése után,

$$\lambda = \sqrt{\frac{4En}{\sigma_f}} \sqrt{\frac{n-1}{n \cdot A}} \left\{ \sqrt{\frac{3nA}{(n-1)^2} \left(\frac{n-1}{2} - \frac{e_o}{h} \right)} \sqrt{\frac{3nA}{(n-1)^2} \left(\frac{n-1}{2} - \frac{e_o}{h} \right) - 1} + \right. \\ \left. + \operatorname{arch} \sqrt{\frac{3nA}{(n-1)^2} \left(\frac{n-1}{2} - \frac{e_o}{h} \right)} \right\} \quad (50)$$

összefüggésre jutunk. Ez tehát a határállapotot elő-
 idéző n , e_o értékpárok feltételi egyenlete

A-C eset

Annak feltétele, hogy a rúd középső keresztmetszete
 határállapotba juthasson, ebben az esetben

$$e_o + y_{\max} = \frac{h}{12n} \left[3(n^2 - 1) - \left(\frac{n+1}{\gamma} \right)^2 \right]$$

Ezt, valamint az állandók (16), (17) értékeit a (34)
 egyenletbe helyettesítve, meghatározható B_3 , tehát

$$B_3 = -\frac{2}{3} \frac{\sigma_f}{E} \frac{n+1}{\gamma}$$

B_3 , valamint a (11), (12), (16), (17), y_B állandók
 értékeit a (36) egyenletbe helyettesítve, B_2 is meg-
 határozható:

$$B_2 = \frac{4}{3} \frac{\sigma_f}{E} (n-1) \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\gamma} \frac{n+1}{n-1} \right) = \frac{4}{3} \frac{\sigma_f}{E} (n-1) B$$

ahol B -vel a zárójelben lévő mennyiséget jelöljük.

A rúdtengely kigömbült alakja szimmetrikus lévén,
 $A_3 = 0$, és így a (33) egyenletből, B_3 , y_B és a (16),
 (17) állandók behelyettesítése után, meghatározható
 ξ_B , mégpedig

$$\xi_B = -\frac{8}{3} \sqrt{\frac{4E\eta}{\sigma_f \lambda^2}} \sqrt{\frac{n-1}{n}}^3 \left(\frac{7}{4} - B \right) \sqrt{B-1}$$

formában. A (29), (30) egyenletekből

$$A_1 = \frac{h \frac{n-1}{6} \sin \alpha_1 \frac{\ell}{2} - e_0 \sin \alpha_1 \frac{\ell}{2} \xi_A}{\sin \alpha_1 \frac{\ell}{2} (1 - \xi_A)}$$

$$B_1 = \frac{-h \frac{n-1}{6} \cos \alpha_1 \frac{\ell}{2} - e_0 \cos \alpha_1 \frac{\ell}{2} \xi_A}{\sin \alpha_1 \frac{\ell}{2} (1 - \xi_A)}$$

A (31), (32) egyenletekből

$$\begin{aligned} \xi_A = & \sqrt{\frac{4E\eta}{\sigma_f \lambda^2}} \sqrt{\frac{n-1}{n \cdot B}}^3 \left\{ \sqrt{\frac{nB}{n-1}} \sqrt{\frac{nB}{n-1} - 1} + \operatorname{arch} \sqrt{\frac{nB}{n-1}} - \right. \\ & \left. - \sqrt{B} \sqrt{B-1} - \operatorname{arch} \sqrt{B} \right\} - \frac{8}{3} \sqrt{\frac{4E\eta}{\sigma_f \lambda^2}} \sqrt{\frac{n-1}{n}}^3 \left(\frac{7}{4} - B \right) \sqrt{B-1} \end{aligned}$$

Végül az így meghatározott értékeket, valamint az állandókat a (35) egyenletbe helyettesítve

határállapotba juthasson, ebben az esetben szintén

$$e_0 + y_{max} = \frac{h}{12n} \left[3(n^2-1) - \left(\frac{n+1}{f} \right)^2 \right]$$

Ezt, valamint a (16), (17) értékeket a (43) egyenletbe helyettesítve, megállapítható B_3 .

$$B_3 = -\frac{2}{3} \frac{\sigma_f}{E} \frac{n+1}{f}$$

A rúdtengely kigömbült alakja szimmetrikus lévén, $A_3 = 0$ és így a (42) egyenletből B_3 és a (16), (17) állandók behelyettesítése után

$$\lambda = \sqrt{\frac{4En}{\sigma_f}} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \left[\sqrt{\frac{n}{3(n-1)^2} \left(\frac{n^2-1}{4n} - \frac{e_0}{h} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} - B \right)} \right] x \\ \times \sqrt{\frac{n}{3(n-1)^2} \left(\frac{n^2-1}{4n} - \frac{e_0}{h} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} - B \right)} \quad (53)$$

összefüggésre jutunk. Ez a határállapotot előidéző n , e_0 értékpárok feltételi egyenlete.

Levezetett képleteink (48), (49), (50), (51), (52), (53) végeredményben arra a kérdésre adnak választ, hogy bizonyos jellemzőkkel megadott rúdnak határállapotát milyen N , e_0 paraméterpárokkal jellemzett teher idézi elő. E paraméterpárok összességét az N , e_0 tengelykereszt síkjában, tehát a különböző eseteknek megfelelően egy-egy vonal fogja jellemezni. Ezzel tehát az u.n. inverz feladatot megoldottuk. Ennek ismeretében most már megemlékezhetünk a direkt feladat megoldásáról is. A direkt feladat a következő kérdés megválaszolása: Ha a teher jellemzői egy-

máshoz képest tetszőlegesen, de fokozatosan nőnek, adott N , e_0 értékig, akkor a rúd (mégpedig a rúd középső keresztmetszete) határállapotba jut-e? Erre a kérdésre a választ megadja az N , e_0 terhelést ábrázoló pont az N , e_0 tengelykereszt síkjában, ahol az előbbiek szerint kiadódó vonal pontjai azon terheléseket ábrázolják, amelyek határállapotot idézhetnek elő. Ha tehát a pont az N , e_0 tengelykereszt, valamint fentiek szerint meghatározott görbék által körülhatárolt mezőbe esik, akkor a teher még nem idézhet elő határállapotot. Ha a pont éppen fentiek szerint meghatározott görbére vagy a mezőn kívül esik, akkor a teher már határállapotot idézhet elő.

5. § Speciális esetek

Az eddig elmondottak magukban foglalják az alábbi speciális eseteket is:

I^0 - Ha a lassan és fokozatosan növekvő erő már eleve központos és központos is marad (tehát csupán az N erő nagysága változik), akkor nyert képleteink $e_0 = 0$ helyettesítéssel ill. határátmenettel használandók. Ekkor, minthogy $e_0 = 0$, csak A-A, A-B és A-C esetek lehetségesek. S most vizsgáljuk meg ezeket az eseteket külön-külön.

A-A eset

A (48) egyenletbe $e_0 = 0$ értéket helyettesítve, és az $n = 1$ esetet (amikor a meggyörbülés nélküli centrikus nyomás a határállapot) tárgyaláson kívül hagy-

juk, reális megoldáshoz csak akkor jutunk, ha

$$\cos \sqrt{\frac{\sigma_f \lambda^2}{4 E n}} = 0$$

vagyis, ha

$$\sqrt{\frac{\sigma_f \lambda^2}{4 E n}} = \frac{\pi}{2}$$

ill. rendezve

$$\lambda = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{4 E n}{\sigma_f}} \quad (54)$$

Ez az összefüggés azonban nem más, mint a kritikus erőre megállapított Euler-féle egyenlet módosított alakja. Ez az egyenlet természetesen csak a $\mathcal{J} = 1$, vagyis csak az ideálisan rugalmas anyagok esetében érvényes.

A-B eset

A (49) egyenletbe $e_0 = 0$ értéket helyettesítve és rendezve, a

$$\lambda = \sqrt{\frac{4 E n}{\sigma_f}} \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{2 \sqrt{\frac{n A}{n-1} - 1}} + \sqrt{\frac{n-1}{n A}}^3 \left\{ \sqrt{\frac{n A}{n-1}} \sqrt{\frac{n A}{n-1} - 1} + \operatorname{arch} \sqrt{\frac{n A}{n-1}} \right\} \right] \quad (55)$$

összefüggésre jutunk. Ez az összefüggés korlátozott szilárdságú ideálisan plastikus anyagok esetében érvényes, mégpedig előző fejtegetéseink szerint akkor, ha

$$n \leq \frac{\mathcal{J}+1}{\mathcal{J}-1}$$

A-C eset

Az (51) egyenletbe $e_0 = 0$ értéket behelyettesítve és rendezve a

$$\begin{aligned} \lambda = & \sqrt{\frac{4En}{6f}} \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{\frac{nB}{n-1}-1}} + \sqrt{\frac{n-1}{nB}} \left\{ \sqrt{\frac{nB}{n-1}} \sqrt{\frac{nB}{n-1}-1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{arch} \sqrt{\frac{nB}{n-1}} - \sqrt{B} \sqrt{B-1} - \operatorname{arch} \sqrt{B} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{8}{3} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \left(\frac{\gamma}{4} - B \right) \sqrt{B-1} \right] \end{aligned} \quad (56)$$

összefüggésre jutunk. Ez az összefüggés ugyancsak korlátozott szilárdságú, ideálisan plasztikus anyagokra érvényes, mégpedig előző fejtegetéseink szerint akkor, ha

$$n \geq \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

II^o - Ha a vizsgált rúd anyaga véges szilárdságú, ideálisan rugalmas anyag, akkor a határállapot csak A-A esetben következhet be. Ez a megállapítás természetesen nemcsak központosan, hanem külponatosan terhelt rudak esetében is érvényes. A feltételi egyenlet ebben az esetben a (48) egyenlet.

III^o - Ha a vizsgált rúd anyaga végtelen szilárdságú ideálisan plasztikus anyag, akkor (51), (52), (53) képleteink $\gamma = \infty$ helyettesítéssel használandók.

Ilyen anyagoknál a határállapot csak az A-C, B-C és C-C esetben következhet be. A határállapot bekövetkezésének feltételi egyenletei tehát

A-C esetben

$$e_o = \frac{h}{6} (n-1) \cos \left[\sqrt{\frac{\epsilon_f \lambda^2}{4En}} - \sqrt{\frac{2(n-1)}{3n}} \left\{ \sqrt{\frac{3n}{2(n-1)}} \sqrt{\frac{3n}{2(n-1)} - 1} + \operatorname{arch} \sqrt{\frac{3n}{2(n-1)}} \right\} \right] -$$

$$- \frac{h}{6} (n-1)^2 \sqrt{\frac{3n}{2(n-1)} - 1} \sin \left[\sqrt{\frac{\epsilon_f \lambda^2}{4En}} - \sqrt{\frac{2(n-1)}{3n}} \left\{ \sqrt{\frac{3n}{2(n-1)}} \sqrt{\frac{3n}{2(n-1)} - 1} + \operatorname{arch} \sqrt{\frac{3n}{2(n-1)}} \right\} \right]$$

B-C esetben

$$\lambda = \sqrt{\frac{4En}{\epsilon_f}} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{n-1}{n}} \left\{ \sqrt{\frac{9}{2} \frac{n}{(n-1)^2} \left(\frac{n-1}{2} - \frac{e_o}{h} \right)} \sqrt{\frac{9}{2} \frac{n}{(n-1)^2} \left(\frac{n-1}{2} - \frac{e_o}{h} \right) - 1} + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arch} \sqrt{\frac{9}{2} \frac{n}{(n-1)^2} \left(\frac{n-1}{2} - \frac{e_o}{h} \right)} - \operatorname{arch} \sqrt{\frac{3}{2}} \right\}$$

C-C esetben

$$\lambda = \sqrt{\frac{4En}{\epsilon_f}} \sqrt{\frac{n-1}{n}} \sqrt{\frac{4}{3(n-1)^2} \left(\frac{n^2-1}{4n} - \frac{e_o}{h} \right)}$$

6. § Példák

A levezetett képletek felhasználásának bemutatására szolgáljanak az alábbi példák:

I. Legyen adva egy rúd a következő jellemzőkkel:
 A rúd keresztmetszete 4 cm oldalhosszúságú négyzet,
 és a rúd hossza 1 m. A rúd mindkét végén elfordulha-
 tóan (csuklósan) van megtámasztva a 10. ábra szerint.
 A rúd anyagának

a folyás határa

$$\sigma_f = 2\,400 \text{ kg/cm}^2$$

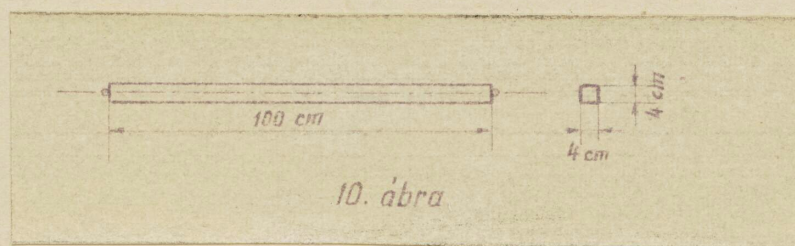
a rugalmassági modulusa

$$E = 2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2$$

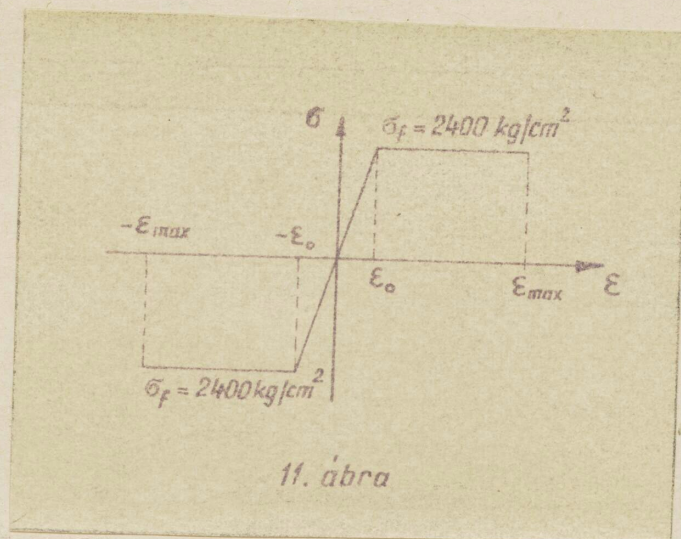
a szivóssága

$$\nu = 5$$

Meghatározandó eme rúd határteherbirása!



A megoldás során mindenekelőtt a rúd karcsúságát kell meghatározni, mely az adott méretek mellett $\lambda = 86,6$. A megadott anyagállandóból következik, hogy az erő-alakváltozás törvényt, amelyen elméletünk alapul, most a 11. ábra szerint kell felvenni.



11. ábra

Amint már említettük, a nyomott rúd határteherbirása nem más, mint mindazon N , e_0 értékpárok összessége, amelyeknél a rúd (mégpedig a rúd középső keresztmetszete) határállapotba juthat. Feltett kérdésre a választ tehát egy vonal fogja jellemezni, az $1/n$, e_0 tengelykereszt síkjában (12. ábra). Tekintettel a számítások rendkívül hosszadalmas voltára, a numerikus kiszámítást csupán az A-A, A-B ill. A-C esetekre fogjuk részletezni.

A-A eset. Ez az eset - minthogy feltételeztük, hogy $\gamma \neq 1$ - nem következhetik be, de egyébként sem érdekes, mert ezen állapotot előidéző tehernél kisebb, de határállapotot ugyancsak előidéző teher is létezik.

A-B eset. Ebben az esetben a határállapotot előidéző $1/n$, e_0 értékpárok összességét a (49) egyenlet jellemzi. A határállapot ily módon való bekövetkezé-

sének feltétele

$$n \leq \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 1,5$$

A-C eset. Ebben az esetben a határállapotot előidéző $1/n$, e_0 értékpárok összességét az (51) egyenlet jellemzi. A határállapot ily módon való bekövetkezésének feltétele

$$n \geq \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 1,5$$

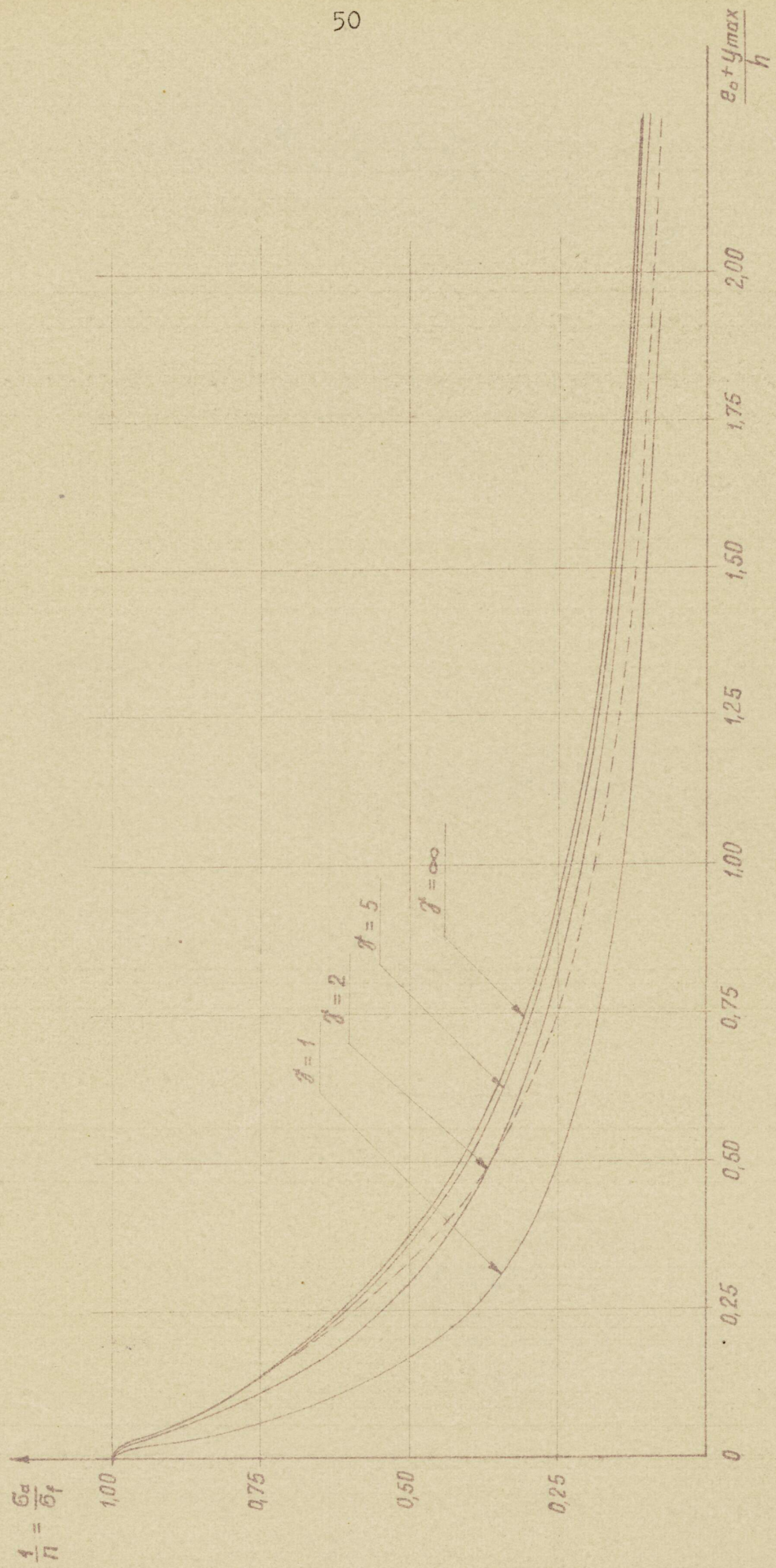
Ezen egyenletekből, n különböző értékeinek egyszerü behelyettesítésével, meghatározhatók e_0 -nak mindazon értékei, amelyek mellett a vizsgált rúd határállapotba juthat. E számítások eredményeit a 12. ábrában az $1/n$, e_0/h tengelykereszt síkjában grafikusan is feltüntettük. E görbe segítségével a határállapotot előidéző N , e_0 értékpárokat egyszerűen meghatározhatjuk.

Ha pl. az a kérdés, hogy $e_0 = 1$ cm kezdeti külponthossz esetén mekkora a határerő, a választ a következőképpen adhatjuk meg:

$$\frac{e_0}{h} = \frac{1}{4} = 0,25$$

és ehhez az értékhez a 12. ábrából $1/n = 0,35$ tartozik, melyből a határállapotot előidéző erő végeredményben

$$N = ah \sigma_f \frac{1}{n} = 4,4 \cdot 2400 \cdot 0,35 = 13450 \text{ kg}$$



14. ábra

II. Legyen adva a rúd anyaga a következő jellemzőkkel:

$$\begin{aligned} \text{a folyáshatár} & \quad \sigma_f = 2\,400 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{a rugalmassági modulus} & \quad E = 2\,100\,000 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

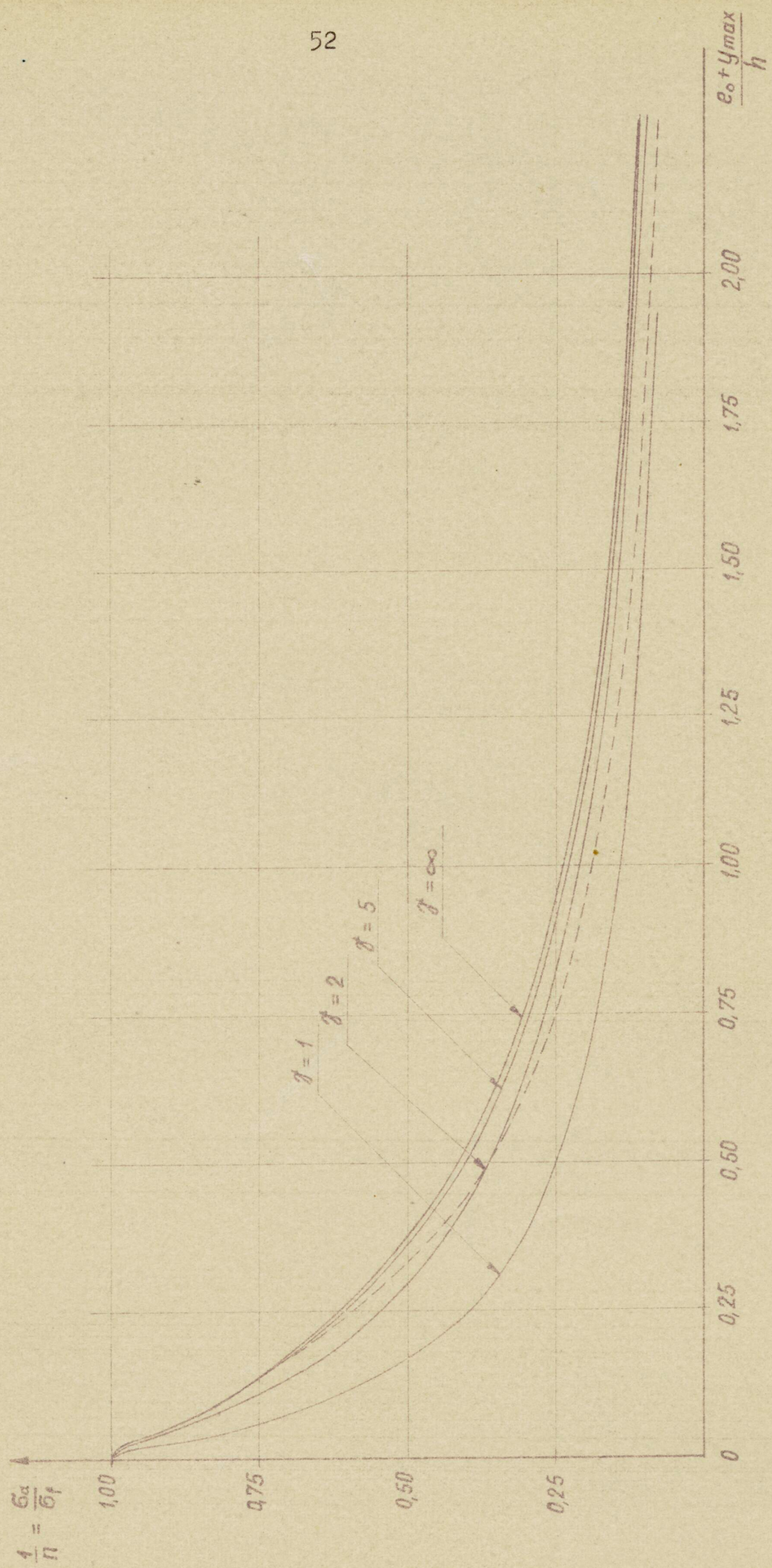
Határozzuk meg a rúd határteherbirását a következő négy esetben:

$$\begin{aligned} \text{ha a szivósság} & \quad \mathcal{J}' = 1 \\ \text{ha a szívósság} & \quad \mathcal{J}' = 2 \\ \text{ha a szivósság} & \quad \mathcal{J}' = 5 \\ \text{ha a szivósság} & \quad \mathcal{J}' = \infty \end{aligned}$$

és tételezzük fel, hogy a terhelő erő központos (vagyis a rúdvégek elfordulási középpontjához viszonyított külpontosság $e_0 = 0$).

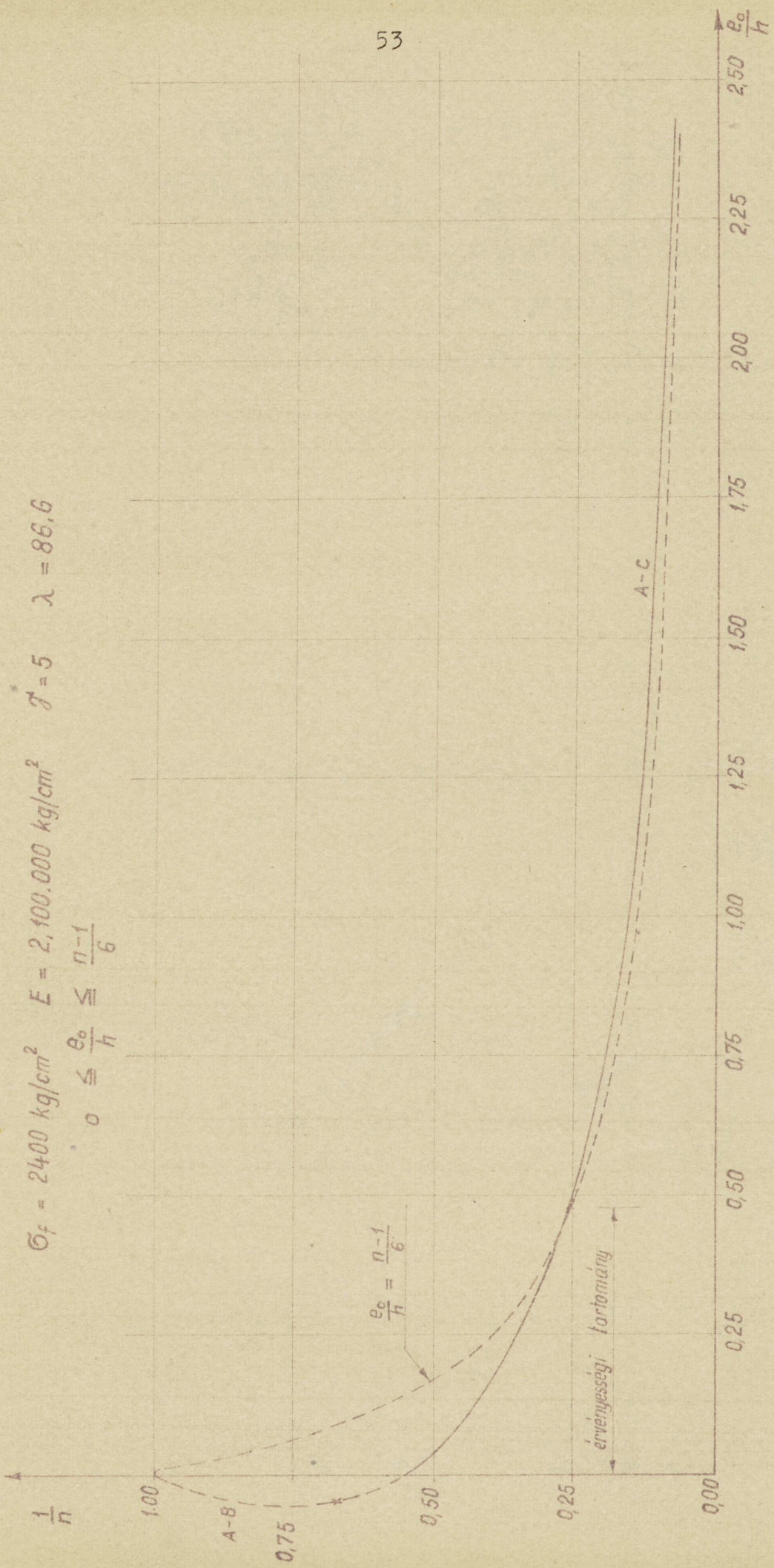
Az ilyen módon terhelt rúd határteherbirására az (54), (55), (56) összefüggéseket állapítottuk meg. A megadott jellemzők felhasználásával ezen összefüggésekből megállapíthatók azok $1/n$, λ értékpárok, melyek esetében a rúd határállapotba kerülhet. Ezen értékpárok összességét az $1/n$, λ tengelykereszt síkjában vonalak ábrázolják (13. ábra). Ugyanezen tények feltüntetése látható a 14. ábrán az $1/n$, y_{\max}/h tengelykereszt síkjában.

A 13. ábrán feltüntetett görbesereg használata az előző példában tárgyalt $\mathcal{J}' = 5$, $\lambda = 86,6$ numerikus esetben a következő: Ha a terhelő erő központos, akkor a határteherbirás értéke gyanánt a 14. ábrából leolvashatóan $1/n = 0,54$, amely értéket a 12. ábrából is leolvashatjuk.



14. obra

$\sigma_f = 2400 \text{ kg/cm}^2$ $E = 2,100,000 \text{ kg/cm}^2$ $\gamma = 5$ $\lambda = 86,6$
 $0 \leq \frac{e_0}{h} \leq \frac{n-1}{6}$



12. ábra

7.§ Összefoglalás

Az ideális alakzat tulajdonságait és határállapotát, valamint a határteherbirás fogalmát a 2.§-ban definiálván, a tanulmány további részében a nyomott rúd határteherbirását határoztuk meg.

E tanulmány során csupán arra az esetre szorítkoztunk, amikor a rúdkeresztmetszet derékszögű négyszög, a rúd eredeti tengelye teljesen egyenes s a terhelő erő iránya párhuzamos marad a rúd eredeti tengelyének irányával. A tanulmány fejtegetései azonban elvi változtatás nélkül kiterjeszthetők azokra az esetekre is, amikor a rúdkeresztmetszet általános alakú, a rúd tengelye már eleve görbe, a terhelő erő pedig általános helyzetű és irányú.

Az alakzat anyagának tulajdonságait kifejező erő-alakváltozás-törvényt és a definiált határnyúlást feltüntető diagramm (4. ábra) feltételezésünk szerint szimmetrikus (pontosabban antimetrikus). Ez a feltevés azonban a valóságos anyagoknál csak többé-kevésbé áll fenn. Nincs azonban elvi akadálya annak sem, hogy e diagrammok helyett elméletünket a valóságot jobban megközelítő, bonyolultabb diagrammokra építsük fel, pl. úgy, hogy a húzott oldalon más határnyúlást, más folyási határt tételezzünk fel, mint a nyomott oldalon. Ennek megfelelően azonban a legyőzendő matematikai nehézségek is növekednek.

Ami pedig tanulmányunknak az irodalomban fellelhető hasonló tárgyú elméletekhez való viszonyát illeti, a következőket állapíthatjuk meg: Tanulmányunk ugyan-

úgy, mint a többi elméletek, a nyomott rúd teherbíráásával foglalkozik, s a teherbírást jellemzőjének a határteherbírást tekinti. Tanulmányunk ugyanúgy, mint a többi elméletek (ha nem is mondják ki határozottan), a határteherbírást alatt olyan terhelést akarnak érteni, amely a rúdban határállapotot idéz elő. Mármint úgy látszik, hogy a különböző elméletek főleg abban térnek el egymástól, hogy mit értenek határállapot alatt. Egy igen egyszerű elmélet pl. az, amelyik a határállapotot egyszerűen úgy definiálja, hogy "A határállapot a rúdnak azon állapota, melynél a rúd tengelye már nem egyenes". A határállapotnak eme egészen primitív definíciójához képest, vagypedig a határállapotnak egyéb elméletében követett, többé-kevésbé pontosabb definíciójához képest - úgy véljük, hogy - jelen tanulmányban a határállapot fogalma a valóságot még jobban megközelítő formában lesz definiálva. Ennek köszönhető, hogy ezen elmélet a határteherbírást az eddigieknél pontosabb kiszámítását teszi lehetővé. Viszont ez az oka annak is, hogy az elméletünkön alapuló számítás több matematikai nehézség legyőzését kívánja.

Feltűnhetett az olvasónak, hogy a stabilitás fogalma e tanulmányban kimondottan sehol sem fordult elő.

Úgy véljük azonban, hogyha a stabilitás fogalmát épp olyan szabatosan definiálnánk, mint pl. a dolgozatunk elején, a határteherbírást fogalmát definiáltuk ill. a stabilitás fogalmát a szakirodalomból megfelelően idéznénk, akkor tanulmányunkban véges-végig ki lehetne mutatni azt, hogy a határteherbírást kifejező statikus teher hatására létrejövő egyensúlyi állapot stabilis.

megfelelő
leírás,
vagy mellátás
leírás!